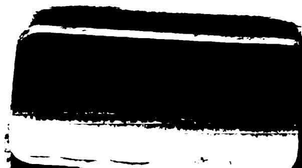




IL PASSATO ED IL PRESENTE

DELLE PRINCIPALI

TEORIE GEOMETRICHE

GINO LORIA

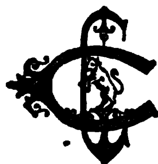
Professore ordinario dell'Università di Genova.

IL PASSATO ED IL PRESENTE

DELLE PRINCIPALI

TEORIE GEOMETRICHE

Seconda edizione accresciuta ed interamente rifatta.



TORINO

CARLO CLAUSEN

1896

TORINO — Stabilimento tipografico VINCENZO BONA.

NELLA PRIMA PAGINA DI QUESTO LIBRO

STIA SCRITTO IL VENERATO NOME

DI

MIA MADRE

POSSA LA SUA AZIONE ALTAMENTE BENEFICA

ESTENDERSI DALL'AUTORE ALL'OPERA

SICCHÈ QUESTA DIVENTI MENO INDEGNA

DELLA SANTA PERSONA

A CUI È CONSACRATA

PREFAZIONE

Alla prima edizione del presente scritto (1) io preludeva colle parole seguenti:

> « Après six mille années d'observations l'esprit humain n'est pas épuisé; il cherche et il trouve encore à fin qu'il connaisse qu'il peut trouver à l'infini et que la seule paresse peut donner des bornes à ses connaissances et à ses inventions ».
>
> BOSSUET.

" I progressi della scienza in genere e della matematica in ispecie furono in questi ultimi tempi così considerevoli, essi continuano a succedersi ancora in modo così rapido ed incessante, che si fa vivamente sentire il bisogno di gettare uno sguardo retrospettivo sul cammino già fatto, il quale permetta ai novizii di penetrare più facilmente nei misteri di essa, ai già provetti di giudicare con più sicurezza quali siano i problemi di cui è più urgente la soluzione.

Il desiderio di soddisfare questo bisogno per quanto riguarda la geometria, cioè per quanto concerne la parte più elevata delle nostre cognizioni positive — poichè, come disse Pascal, *tout ce qui passe la géométrie nous surpasse* —, mi spinse a scrivere questa monografia storica. Possa quest' abbozzo incompleto provocare uno scritto

(1) Inserita nel T. 38, II Serie, delle Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1887.

degno dell'altezza del suo scopo; possa questa povera cronaca precedere la storia della geometria nel nostro secolo! „

Aprile, 1887.

Ho creduto conveniente riprodurre qui queste linee perchè esse bastano a designare gli intenti che ebbero e tuttora conservano le pagine che ora presento al pubblico matematico “ rinnovellate di novella fronda „; tali intenti sono — mi piace ripeterlo — da un lato quello di aiutare la ricerca bibliografica preliminare che deve precedere oggi qualunque fruttifera investigazione scientifica ed adunare alcuni materiali per la storia della geometria nel secolo XIX, dall' altro quello di mostrare storicamente la legge di continuo sviluppo che governa i varî rami della geometria e di addurre innumerevoli esempî a sostegno di quel curioso fenomeno che un poeta di genio espresse tanto chiaramente colle parole:

Combien de temps une pensée,
Vierge obscure, attend son époux.

Non è il caso di esporre per disteso i segreti motivi delle modificazioni (alcune radicali) che subì il mio antico lavoro; d'altronde al lettore intelligente e dotto non isfuggirà che essi si compendiano nel desiderio di rendere questo quadro delle attuali condizioni della geometria più prossimo al vero e meno indegno della festosa accoglienza che ebbe al suo primo apparire, in particolare di renderlo più utile, precisando ed estendendo le notizie intorno alle più cospicue produzioni moderne. Spero non mi si imputerà come incoerenza la modificazione di certe opinioni o giudizî che l'evoluzione incessante della scienza in questi ultimi nove anni rende oggi inaccettabili. Così mi lusingo

che non mi verrà fatto addebito di avere mantenuto il mio antico sistema di sopprimere tutti i particolari intorno alle persone di cui mi occupo, sistema inevitabile in una storia, qual'è l'attuale, non di uomini ma di idee; tuttavia, nell'intento di aiutare il lettore bramoso di conoscere assieme alla geometria i geometri, ebbi cura di far menzione, nei luoghi che mi parvero più opportuni, gli scritti biografici capaci di istruirlo.

Ritengo eziandio per superfluo il descrivere qui le enormi difficoltà che si oppongono a che un lavoro come quello che or congedo per le stampe si avvicini a quella sognata perfezione che è stimolo e tormento di ogni scrittore; lo sviluppo preso in questo scorcio di secolo dalla geometria è di proporzioni talmente colossali da incutere terrore in chi voglia dei risultati conseguiti delineare i contorni e valutare l'essenza: valga questa considerazione a farmi perdonare le involontarie ommissioni, gli apprezzamenti certamente non sempre inconfutabili, la distribuzione della materia che per fermo non tutti troveranno commendevole.

Sicuro di essermi sforzato con ogni mia possa di accostarmi all'ideale dello storico imparziale e fedele, con animo sereno io abbandono una nuova volta questo libro nelle mani de' suoi giudici naturali, soltanto augurando che almeno gli intendimenti dell' autore siano così bene compresi e tanto rettamente apprezzati che fra non molto la letteratura matematica annoveri dei lavori congeneri, ma assai migliori, sulle altre scienze esatte. Il primo anello di questa aurea collana a venire doveva essere riserbata alla geometria, e spettava all'Italia il fonderlo, all'Italia dove la geometria per la prima volta assurse a dignità di scienza per merito di Pitagora, all'Italia che da un mezzo secolo a questa parte contribuisce così pos-

sentemente al progredire della scienza dell'estensione, da essere considerata oggi come aquilifera della geometria pura.

Un sentimento di riconoscenza profonda m'impone di esprimere qui i miei ringraziamenti più vivi al professore G. Vivanti, dell'Università di Messina, che con ammirabile abnegazione volle fare a mio vantaggio la parte di Cireneo nell'ingrato cómpito della correzione delle bozze, ed al sig. Clausen, il quale affrontò coraggiosamente ogni sacrificio pur di rendere questa edizione degna dell'alta fama della sua casa.

Aprile, 1896.

ELENCO DELLE ABBREVIAZIONI

adoperate per designare le Collezioni di lavori scientifici più spesso citate.

Acta = Acta mathematica. Journal rédigé par G. Mittag-Leffler.

Am. Journ. = American Journal of Mathematics pure and applied.

Amsterdam Versl. = Verslagen en Mededeelingen der K. Academie van Wetenschappen, Amsterdam.

Ann. de Math. = Annales de Mathématiques.

Ann. Éc. norm. = Annales scientifiques de l'École normale supérieure (Paris).

Ann. di Mat. = Annali di Matematica pura ed applicata.

Arch. der Math. = Archiv der Mathematik und Physik, gegründet von J. A. Grunert, fortgesetz von R. Hoppe.

Ass. fr. = Association Française pour l'Avancement des Sciences, Compte rendu.

Mem Soc. XL = Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL).

Atti Ist. Ven. = Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.

Belgique Bull. = Bulletin de l'Académie Royale des Sciences, Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.

Belgique Mém. = Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie ecc.

Berliner Abh. = Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Berliner Ber. = Monatsberichte o, *dal 1882*, Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Bibl. math. = Bibliotheca matematica. Journal d'histoire des mathématiques publié par G. Eneström.

Bökl. Mitth. = Mathematisch-naturwissenschaftliche Mittheilungen herausgegeben von Dr. O. Böklen.

Bologna Mem. = Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istit. di Bologna.

Bologna Rend. = Rendiconti delle sedute dell'Accademia ecc.

Bordeaux Mém. = Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux.

Brit. Ass. = Reports of the Meeting of the British Association for the Advancement of Science.

Bull. Bonc. = Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni.

Bull. Sc. Math. = Bulletin des Sciences mathématiques (*sino al 1884* et astronomiques).

Bull. S. M. F. = Bulletin de la Société mathématique de France.

Bull. Soc. phil. = Bulletin de la Société philomatique de Paris.

C. R. = Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris).

Cambridge Journ. = Cambridge and Dublin mathematical Journal.

Cambridge Proc. = Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.

Cambridge Trans. = Transactions id.

Coll. math. = In memoriam Dominici Chelini. Collectanea mathematica. Mediolani, 1881.

Corr. Éc pol. = Correspondance sur l'école polytechnique.

Corr. math. = Correspondance mathématique et physique dirigée par Garnier et Quetelet.

Deutsch.Math.-Ver. = Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Edinburgh Trans. = Transactions of the R. Society of Edinburgh.

Erlangener Ber. = Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen.

Giorn. di Mat. = Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane.

Götting. Abh. = Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen.

Götting. Nachr. = Nachrichten id.

Hamburger Mitth. = Mittheilungen der Hamburger Gesellschaft der Wissenschaften.

Hopkins Circ. = John Hopkins University Circulars.

Journ. de Math. = Journal de Mathématiques pures et appliquées.

Journ. Éc. pol. = Journal de l'École polytéchnique (Paris).

Journ. für Math. = Journal für die reine und angewandte Mathematik.

Irish Proc. = Proceedings of the Royal Irish Academy (Dublin).

Irish Trans. o *Dublin Trans.* = Transactions id.

Leipziger Abh. = Abhandlungen der Kgl. Sächsichen Gesellschaft der Wissensch. zu Leipzig.

Leipziger Ber. = Berichte über die Verhandlungen id.

Lie Arch. = Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.

Liège Mém. = Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège.

Lincei Atti = Atti della R. Accademia dei Lincei (Roma).

Lincei Mem. = Memorie, Id.

Lincei Rend. = Rendiconti delle sedute, Id. (Ogni annata è divisa in due semestri, che distingueremo con gli indici 1 e 2 posti al piede del numero che indica l'anno di pubblicazione).

Lincei Trans. = Transunti, Id.

Lund Akad. = Lunds Akademiens Afhandlinger.

Math. Ann. = Mathematische Annalen.

Mém. prés. = Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre.

Mem. Ist. Lomb. = Memorie del R. Istit. Lomb. di Scienze, Lettere ed Arti.

Mem. Ist. Ven. = Memorie del R. Istit. Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.

Mess. = The Messenger of Mathematics.

Monatshefte = Monatshefte für Mathematik und Physik.

Münchener Abh. = Abhandlungen der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissensch. zu München.

Münchener Ber. = Sitzungsberichte id.

Napoli Mem. = Memorie dell'Accad. delle Sc. fisiche e matem. di Napoli.
Napoli Rend. = Rendiconto, Id.
Nouv. Ann. = Nouvelles Annales de Mathématiques.
Palermo Rend. = Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.
Petersbourg Bull. = Bulletin de l'Académie impériale de St. Petersbourg.
Petersbourg Mém. = Mémoires, Id.
Phil. Mag. = London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine.
Phil. Trans. = Transactions of the Royal Society of London.
Pisa Ann. = Annali della R. Scuola Normale superiore di Pisa.
Proc. R. S. = Proceedings of the Royal Society of London.
Prager Abh. = Abhandlungen der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften (Prag).
Prager Ber. = Sitzungsberichte id.
Proc. L. M. S. = Proceedings of the London Mathematical Society.
Progreso = El Progreso mathématico.
Quart. Journ. = Quarterly Journal of pure and applied Mathematics.
Rend. Ist. Lomb. = Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.
Riv. di Mat. = Rivista di Matematica diretta da G. Peano.
Stockolm Oefv. = Oefversigt af K. Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Stockholm.
Tidsskr. = Tidsskrift for Mathematik.
Torino Atti = Atti dell'Accademia reale delle Scienze di Torino.
Torino Mem. = Memorie, Id.
Tortolini Ann. = Annali delle Scienze matematiche e fisiche.
Toulouse Ann. = Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques.
Wiener Ber. = Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der K. Akademie der Wissenschaften zu Wien.
Wiener Denk. = Denkschriften id.
Wolf. Zeitschr. = Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich.
Zeitschr. f. Math. = Zeitschrift für Mathematik und Physik.

Avvertenza. — Nelle citazioni il numero romano indica la *Serie*, il successivo numero arabico il *Volume*, a cui segue l'*anno di pubblicazione*. L'abbreviazione *Diss.* serve a indicare una Dissertazione di laurea ossia un'Inaugural-Dissertation.

INDICE

CAPITOLO I.

Sguardo alle origini ed allo sviluppo della geometria sin verso il 1850. — *Pag.* 1.

CAPITOLO II.

Teoria delle curve piane algebriche. — *Pag.* 37.

CAPITOLO III.

Teoria delle superficie algebriche. — *Pag.* 82.

CAPITOLO VII.

CAPITOLO VIII.

CAPITOLO IX.

CAPITOLO I.

Sguardo alle origini ed allo sviluppo della geometria sin verso il 1850.

Tutte le fasi della coltura sono siffattamente collegate fra loro, che si tenterebbe invano di studiare un ramo qualunque di storia, a partire da un'epoca determinata, senza gettare uno sguardo su i tempi e gli avvenimenti anteriori (1). Se questo aforisma storico è difficilmente confutabile riguardo ad una qualunque delle scienze a noi note, sembra dotato di irrefragabile verità quando venga applicato ad una disciplina così conservatrice com'è la matematica, la quale non distrugge i lavori dei periodi precedenti per costruire in luogo di essi dei nuovi edifici (2). Ragion vuole pertanto che noi, prima di addentrarci nel tema proprio di questa storia, prima cioè di discorrere della geometria moderna, esaminiamo brevemente quali furono le origini e quali i gradi di sviluppo che attraversò la nostra scienza prima di raggiungere lo stato a partire dal quale ci proponiamo di studiarne minutamente lo svolgimento.

1. Determinare e storicamente dimostrare l'origine prima delle ricerche geometriche è questione che invano tenterebbesi di risolvere (3), perchè nessun documento scritto ci fa assistere al risveglio ed al primo balbettìo dello spirito umano. Le esperienze quotidiane di qualsia persona intelligente guidano in modo tanto naturale alla concezione delle forme geometriche più semplici ed alla contemplazione delle loro scambievoli rela-

(1) Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, 1 (Paris, 1838), p. 3.

(2) Hankel, *Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten* (II Aufl., Tübingen, 1885), p. 7.

(3) Essa è trattata dal punto di vista psicologico nel I Libro dell'*Histoire des mathématiques* dell'Hoefer (2e éd., Paris, 1879); che noi citiamo a titolo di curiosità, non già per fare adesione alle idee ivi sostenute.

zioni, che invano si tenterebbe di assegnare l'epoca in cui nacque la geometria e tanto meno di citare colui al quale spetta il vanto di avere per primo coltivata tale nobilissima disciplina. Le informazioni che a tal proposito ci tramandarono gli antichi sono tanto incerte, vaghe, e poco degne di fede, che, se non tenebre complete, certamente soltanto qualche po' di luce crepuscolare sta innanzi a chi si propone di rendersi ragione del come e del perchè la geometria entrò a far parte del campo d'indagine dei pensatori; anzi tale luce è così scarsa che soltanto permette di percepire i contorni di alcuni frammenti di maggior mole che si sottrassero all'ingiuria del tempo. Quali siano e qual valore possiedano diremo ora brevemente, occupandoci successivamente dei varî popoli che nell'antichità più remota raggiunsero un grado di civiltà sufficiente da permettere lo studio della scienza pura.

Non parleremo però degli Etruschi, in primo luogo perchè le notizie intorno al sapere geometrico d'un popolo il cui linguaggio è tuttora un enigma pei filologi sono, se non nulle, certamente infinitesime, ed in secondo luogo perchè sembra accertato che essi esercitarono qualche influenza soltanto sui Romani, i quali da essi vennero avviati e diretti nelle ricerche geodetiche (cfr. più innanzi, al n. 6). Se altrettanto facciamo per gl'Indiani è che, non potendosi con sicurezza determinare di dove scaturiscano le relative notizie che oggi abbiamo a nostra disposizione, non si è in diritto di parlare di una geometria indiana più antica epperò indipendente dalla geometria greca di cui fra poco ci occuperemo (v. nn. segg.). In modo non dissimile ci comporteremo rispetto ai Cinesi, perchè chi mai può farsi garante che le cognizioni geometriche (d'altronde assai esigue) da essi possedute non siano state importate dal di fuori e poi dichiarate come proprietà nazionale da un popolo la cui boria è tale che ancor oggi si vanta di essere pervenuto nell'antichità più remota a ritrovati a cui le altre nazioni arrivarono a mala pena in tempi a noi vicini?

Il popolo che ebbe per propria sede le rive del Tigri e dell'Eufrate viene considerato come quello che prima d'ogni altro si dedicò all'aritmetica ed all'astronomia; tuttavia anche fra gli Assiri ed i Babilonesi si possono rintracciare delle cognizioni di geometria, scienza verso cui essi si sentivano spinti dalla

speranza di poterla applicare a trarre i presagi dell'avvenire; ed è forse dal loro affaticarsi intorno alla *geomanzia* che essi furono guidati a considerare, come fecero, parallele, triangoli e quadrangoli, a cercare dei metodi per costruire in pratica degli angoli retti, a dividere la periferia d'un cerchio in 6 e in 360 parti eguali, a determinare un valore approssimato del rapporto della circonferenza al diametro.

2. Importanza di gran lunga maggiore del popolo testè considerato ha per noi quello che ebbe stanza sulle rive del Nilo, giacchè i Greci, che sono senza dubbio da considerarsi per i nostri progenitori scientifici, si dichiaravano, ed erano infatti, ad esso debitori del suolo sul quale eressero il loro edificio geometrico.

Erodoto, che viaggiò in Egitto verso il 460 a. C., assevera che la geometria ebbe origine in quel paese allorquando il re Sesostri divise in parti eguali fra i suoi sudditi tutto il terreno coltivabile che si trovava nel suo regno; aggiunge che una spinta potentissima ad occuparsi di geometria proveniva agli Egiziani dalla necessità di ripristinare ogni anno le linee di confine fra le varie proprietà che il Nilo cancellava durante le periodiche sue inondazioni. Niuna meraviglia adunque deve recare se d'altronde Isocrate, verso il 393 a. C., accertava che lo studio della geometria veniva raccomandato ai giovani Egiziani. In senso non dissimile si esprimono Platone ed Aristotele, Diodoro Siculo ed Erone Alessandrino, Strabone e Democrito; anzi quest'ultimo per dimostrare la propria abilità geometrica non trova di meglio che asserire: " nel costruire delle linee mediante conseguenze tratte dalle ipotesi, nessuno mi ha sorpassato, nemmeno i cosidetti ἀρπεδονάπται degli Egiziani "; chi fossero questi " arpedonatti " non si sa con assoluta certezza, ma però a noi sembra dotata di molta verosimiglianza l'ipotesi di M. Cantor (1), secondo cui il loro nome (tenditori di corde) deriverebbe dall'essere stato loro principale ufficio quello di costruire in pratica degli angoli retti foggiando a triangolo ret-

(1) *Vorlesungen über Geschichte der Math.*, I (Leipzig, 1ª ed., 1880, p. 55, 2ª, 1894, p. 64).

tangolo una corda divisa in tre parti lunghe risp. 3, 4 e 5 unità lineari.

L'origine pratica assegnata alla geometria da Erodoto, la speciale operazione affidata agli " arpedonatti " e l'esistenza in Egitto di opere architettoniche ed idrauliche colossali ed ammirande, fanno pensare che la geometria degli Egiziani avesse una spiccata tendenza verso le applicazioni, e questo sospetto si rafforza esaminando un importantissimo documento scritto che noi possediamo intorno alla matematica di quel popolo. Alludiamo al *Manuale del Calcolatore* conservatoci nell'omai celebre Papiro Rhind, scritto da un tal Ahmes diciassette o venti secoli a. C. (1). Sventuratamente questo scritto, mentre offre una larga messe di notizie intorno agli antichi procedimenti di calcolo, dà scarse informazioni intorno alle cognizioni geometriche che avevano gli abitanti della terra dei Faraoni, giacchè ivi la geometria non è trattata *ex-professo,* ma al contrario certe regole che essa insegna per valutare delle superficie e dei volumi vengono tacitamente applicate nell'intento di illustrare i procedimenti aritmetici. Nel *Manuale* citato si trovano quindi soltanto alcune tracce di geometria di misura, sul valore delle quali non v'è accordo perfetto fra i varî storici (2); così è ben vero che sembra indiscutibile gli Egiziani sapessero calcolare l'area d'un quadrato, ma non è sicuro sapessero fare altrettanto per un rettangolo, ed è ancora più dubbio se essi fossero in grado di misurare con esattezza l'area d'un triangolo o d'un trapezio; inoltre essi eguagliavano un cerchio ad un quadrato avente per lato $^8/_9$ del diametro, il che val quanto assumere $\pi = (^{16}/_9)^2 = 3,1604$, valore abbastanza approssimato. Quanto alle regole con cui essi misuravano la capacità di certi granai, è impossibile giudicarle, non essendo dichiarata la forma di questi; giova però espressamente rilevare come certi problemi concernenti le piramidi fossero da essi sciolti con un calcolo speciale presumibilmente analogo a quello che oggi noi eseguiremmo valendoci

---

(1) A. Eisenlohr, *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter* (Leipzig, 1ª Aufl., 1877, 2ª Aufl., 1891).

(2) Cfr. oltre alle opere già citate: E. e V. Revillout in *Revue Egyptologique*, 2, 1881, pp. 304-314 e Em. Weyr, *Ueber die Geometrie der alten Aegypter* (Wien, 1884).

delle nozioni di *seno* e di *tangente* d'un angolo (1). Si vede dunque che la geometria degli antichi Egiziani offre parecchi punti oscuri, a chiarire i quali bisognerebbe ricorrere ad altri documenti, ma questi o sono tuttora sconosciuti o non vennero ancora decifrati (2); intanto, cioè sino a che non siasi dimostrato che gli Egiziani sapessero dar ragione delle regele geometriche applicate da Ahmes, ci crediamo autorizzati a negare alla collezione di cognizioni geometriche che essi possedevano il carattere di vera scienza.

3. Tale conclusione ha importanza specialmente perchè (tenendo conto anche di quanto dicemmo nel n. 1) ci esonera dal trattare la questione che consiste nel determinare quali e quanti elementi esotici si trovino nella geometria greca (3); infatti, ammesso pure che i Babilonesi e gli Egiziani abbiano comunicato ai Greci tutto il loro sapere geometrico, questi non ne avrebbero in conseguenza ritratto che una somma di cognizioni assai esigua e certamente non lo stimolo alla ricerca matematica; d'altronde ciò è confermato dall'unità di direzione nell'evoluzione di tutta la geometria greca, unità che sarebbe difficilmente spiegabile da chi la considerasse come un albero trapiantato da paesi stranieri.

La persona per merito della quale in Grecia la lampada della scienza si accende ed agitata vampeggia è Talete Milesio (4); a lui siamo debitori del trasporto in Europa dei germi delle scienze esatte e dei primi tentativi di coltivarle; se a lui ed ai suoi seguaci (i componenti della " Scuola jonica ") non si può far risalire alcuna capitale scoperta matematica, gli è che l'indiscutibile tendenza verso le ricerche fisiche che aveva Talete si accentua siffattamente ne' suoi discepoli e continuatori (Anassimandro ed Anassimene) che questi finiscono col porre in

---

(1) M. Cantor, *Ueber den sogenannten Seqt der alten Aegypter* (Wiener Ber., 90, 1884).

(2) Cantor, *Vorlesungen*, 1 (2ª ed.), p. 23.

(3) Come è noto, la questione analoga per le altre discipline e specialmente per le filosofiche è estremamente controversa: cfr. Zeller, *Die Philosophie der Griechen* (Leipzig).

(4) Maggiori particolari sui geometri di cui tratta il presente n. (in ispecie le relative determinazioni cronologiche) si troveranno nella monografia dell'autore: *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, libro I, *I geometri greci precursori di Euclide* (Mem. della R. Accademia di Modena, II, 10, 1893).

non cale le investigazioni di matematica pura: Talete e la scuola jonica rappresentano dunque, a parer nostro, il bagliore antelucano precursore dell'alba della matematica greca.

Ma, scomparsa la setta dei fisici Jonî, appare un altro uomo e vengono gettate le basi d'un'altra scuola — Pitagora e la Scuola italica — nella quale sembra ragionevole collocare le scaturigini del maestoso fiume delle investigazioni geometriche; infatti in essa con l'assetto stabile raggiunto dalla teoria dei rapporti e delle proporzioni, lo studio dei problemi di " applicazioni di aree " e l'introduzione delle quantità irrazionali vengono approntati gli strumenti che vennero dipoi continuamente adoperati dai più eminenti fra i geometri antichi, ed ai quali deve sempre ricorrere chiunque intenda seguirne le tracce luminose.

Lo sfacelo della comunità pitagorica non spegne l'entusiasmo per la matematica negli ammiratori e seguaci del filosofo di Samo, tanto vero che noi troviamo in Ippocrate da Chio ed Archita da Taranto, tardi discepoli di Pitagora, due strenui combattenti per la ricerca del vero geometrico. Nè le altre sètte filosofiche che dapoi pullularono in Grecia rimasero indifferenti al progresso delle scienze esatte: lo dimostra quanto sappiamo intorno a Zenone e Democrito, ad Anassagora ed Ippia, a Platone ed Aristotele, ed alla falange di pensatori che da questi vennero istruiti o diretti.

Grazie al concorso di tanti elevati ingegni vengono gettate così solide basi dell'edificio geometrico che più d'uno giudica arrivato l'istante di organizzare in un corpo di dottrina i risultati delle investigazioni compiute; vengono inoltre studiati a fondo i tre famosi problemi della quadratura del circolo, della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo, il che offre il destro (ad Archita, Eudosso da Cnido e Dinostrato) di scoprire delle nuove importanti linee piane ed a doppia curvatura; sono di più scoperte e da Aristeo il Vecchio coordinate le proprietà e fatte svariate applicazioni di quelle curve che Menecmo scoperse e Keplero doveva più tardi ravvisare per le traiettorie degli astri; finalmente il concetto di *infinito* fa timidamente il suo ingresso nella matematica, ove era destinato ad occupare più tardi una posizione di eccezionale importanza. Nello stesso tempo anche i metodi di ricerca e di esposizione delle verità

geometriche vengono fatti oggetto di accurato studio: si arriva così al *metodo di riduzione* dovuto ad Ippocrate, al *metodo analitico* formulato da Platone, al *metodo di esaustione* così brillantemente applicato da Eudosso. D'altra parte coll'introdurre il diorismo Leone segnala un importante complemento che esige la soluzione di qualsia problema, mentre col determinare le condizioni d'invertibilità d'un teorema, Menecmo insegna un metodo fecondo per dedurre da una proposizione delle altre. Di più la logica, che per tanti intimi legami è congiunta alla matematica, subisce potenti impulsi dalla dialettica, dalla sofistica e dall'insegnamento di Socrate; gioisce in conseguenza di così cospicui perfezionamenti che Aristotele crede giunto il momento di esporne i canoni fondamentali in un'opera che rimase poi classica per lungo volgere di secoli.

4. Da ciò emerge come tutto sembrava cospirare a che sorgesse un periodo di singolare floridezza per la geometria, ed infatti esso non si fece attendere; esso cade nell'epoca greco-alessandrina e, se viene paragonato ai periodi che lo precedettero e lo seguirono, merita il nome di *periodo aureo della geometria greca,* con cui a noi piace di designarlo. Farne un quadro completamente fedele è impresa oggi ineseguibile (1), giacchè soltanto alcuni pochi personaggi di quell'epoca possono venire ritratti con esattezza, di altri si percepisce soltanto qualche lineamento, di altri ancora conosciamo l'esistenza ma non giungiamo a discernere le fattezze ed il contegno. Tuttavia quanto ne sappiamo ci abilita ad asserire, che al modo istesso che la filosofia greca nel periodo del suo più abbagliante splendore trovò in Socrate, Platone e Aristotele i suoi più cospicui rappresentanti, così nel periodo aureo della geometria greca spiccano giganteggiando Euclide, Archimede ed Apollonio. Per merito del primo di questi geometri il mondo civile arriva in possesso d'una raccolta sapientemente ordinata delle proprietà più essenziali dell'estensione figurata, raccolta che per secoli e secoli fu giudicata come un codice d'insuperabile valore e che tuttora impone ammirazione e rispetto anche in coloro che non ne

(1) Cfr. G. Loria, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, libro II, *Il periodo aureo della geometria greca* (Mem. della R. Accad. di Modena, II, 11, 1895).

accettano ciecamente le disposizioni ed i precetti. Il secondo — capostipite dei geometri italiani, organizzatore della geometria metrica superiore, precursore di Leibniz e Newton — ci si palesa di così meravigliosa fecondità nell'immaginare degli espedienti per risolvere, evitando con minuziosa cura l'intervento del concetto d'infinito, una pleiade di questioni che oggi si riguardano come di stretta pertinenza del calcolo infinitesimale, che lo studio di essi riempie oggi ancora di stupore ed induce melanconicamente a domandarci se l'invenzione di metodi generali che tanto affaticò gli scienziati moderni non abbia per avventura inaridita la fonte degli espedienti ingegnosi. Meno viva e spontanea sorge l'ammirazione in chi medita le opere di Apollonio, perchè noi siamo così immedesimati negli odierni procedimenti d'indagine, solleciti e generali, che ci riesce malagevole il renderci conto di quale ingente somma di lavoro esigesse il giungere al vero senza invocarne l'aiuto; sicchè a stento arriviamo a schermirci da un senso di sorpresa che indugia l'entusiasmo; ma ove ci si pervenga si arriva a giustificare coloro che giudicano Apollonio per la più grande mente geometrica che il mondo abbia veduto prima di Steiner.

Gli sforzi concordi di questi tre sommi matematici, dei loro contemporanei o immediati successori (fra cui ricorderemo Ipsicle d'Alessandria, Diocle, Nicomede, Perseo e Zenodoro) assicurarono dei fondamenti inattaccabili a tutto l'edificio geometrico, prepararono il terreno al calcolo infinitesimale ed accrebbero a dismisura la sfera d'influenza della geometria col ricondurre entro i suoi confini delle nuove ed interessantissime forme geometriche; essi guidarono a molteplici soluzioni dei problemi (già famosi nel periodo pre-euclideo) della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo, ed insegnarono a contemplare quello della quadratura del circolo dall'unico punto di vista che — date le cognizioni algebriche dell'epoca — allora ne permettesse una soluzione; finalmente essi gettarono i fondamenti dello studio geometrico dei massimi e minimi, ed in particolare della dottrina degli isoperimetri. Da ultimo col somministrare gli elementi più importanti della celebre raccolta didattica che va sotto il nome di *Luogo analitico,* essi s'industriarono di lastricare la via agl'investigatori dell'avvenire, epperò si sforzarono a che lo spirito d'indagine geometrica non si spegnesse con essi.

5. L'elenco dei grandi nomi che vanta la matematica greca presenterebbe una imperdonabile lacuna ove non facesse menzione di Erone d'Alessandria e Claudio Tolomeo. L'opera scientifica del primo fu specialmente geodetica e quella del secondo astronomica; quella fa apparire Erone come il più antico scrittore greco di geodesia, ne stabilisce il legame intimo con Ahmes (v. n. 1), ma può valutarsi con mediocre esattezza e grande difficoltà per lo stato attuale dei manoscritti, i quali sono deturpati da ommissioni ed inquinati da aggiunte fatte da anonimi chiosatori di valore assai discutibile; per converso l'azione di Tolomeo si può misurare perchè il suo lavoro più cospicuo — la *Grande Composizione* od *Almagesto* — è giunto a noi (pel tramite degli Arabi) completo e ci presenta un trattato di trigonometria sferica accompagnato da capitoli importanti di trigonometria piana e fondato in parte sulla teoria delle trasversali per triangoli piani e sferici, di cui il geometra Menelao d'Alessandria aveva dianzi gettati i fondamenti.

Spenti i grandi pensatori rammemorati in questo n. e nel precedente, per molte ragioni intrinseche ed estrinseche che non è qui il momento di descrivere, sembra fra i Greci si raffreddi l'amore per le ricerche geometriche od almeno scompaia la forza per compierle; comincia allora l'epoca dei commentatori, che a noi piace designare col nome di *periodo argenteo della geometria greca.* Appartengono ad esso Eutocio e Proclo, che vanno ricordati con riconoscenza per le numerose, importanti notizie che ci serbarono su l'antica geometria e gli antichi geometri, ma che non fecero compiere alcun passo in avanti alla scienza nostra; si potrebbe anzi dire che Proclo tentò di farla retrocedere quando nel commentare Euclide mescolò matematica e filosofia, quasi volesse rimettere in onore un sistema che appunto Euclide, forse per primo, aveva con piena ragione vigorosamente combattuto coll'esempio. Nè stima molto maggiore merita Sereno di Antissa o di Antinoupoli (1), il quale occupandosi delle sezioni del cilindro incidentalmente ha dimostrato che la relazione armonica è proiettiva, e Teone d'Alessandria, editore d'Euclide ed illustratore di Tolomeo. Inchiniamoci invece riverenti innanzi a Pappo Alessandrino il quale arrecò dei note-

(1) Cfr. Heiberg, *Ueber den Geburtsort des Serenos* (Bibl. math., 1894).

voli contributi alle opere che commentò nella celebre sua *Collezione matematica;* ivi sono fatti dei notevoli complementi alla geometria elementare, sono assegnate delle nuove proprietà della spirale d'Archimede, dimostrate della quadratrice di Dinostrato, due nuove costruzioni estremamente notevoli per essere fondate sopra considerazioni stereometriche, è definita e studiata la curva sferica analoga alla spirale d'Archimede, il che porge a Pappo l'occasione di trovare l'area d'una certa porzione di sfera (prima complanazione conosciuta d'un'area non piana); sorvoliamo sulle aggiunte fatte alla teoria degli isoperimetri per ricordare il teorema ingiustamente attribuito a Guldino (1577-1643) stabilente un legame stretto fra la posizione del baricentro d'una figura piana ed il volume che questa genera rotando attorno ad un asse; inoltre i cenni intorno alla " geometria con una sola apertura di compasso „ e le numerose relazioni segmentarie che oggi si considerano come ingredienti indispensabili della teoria del rapporto armonico e dell'involuzione. Non basta ciò forse a dimostrare che il genio matematico greco, come la lampada che sta per ispegnersi, gitta, mentre agonizza, un raggio di splendidissima luce?

6. Sulla scena matematica come primo attore al popolo greco segue il popolo romano, ma la comparsa di questo segna un indiscutibile regresso (1). Giacchè i Romani, conquistatori e legislatori del mondo intero, sembra fossero privi di qualunque tendenza alle ricerche di scienza pura (2); la loro matematica, anche nell'istante in cui maggiormente rifulse, fu essenzialmente pratica, anzi si potrebbe dire fu soltanto religiosa e legale (3). Se la geometria non cadde durante l'epoca romana

---

(1) A conferma di quest'asserzione ricordiamo le seguenti eloquenti parole del celebre storico delle matematiche italiane: " .....mais bientôt le Romain arrive, il saisit la science personnifiée dans Archimède, et l'étouffe. Partout où il domine, la science disparaît: l'Étrurie, l'Espagne, Carthage en font foi. Si plus tard Rome n'ayant plus d'ennemi à combattre, se laisse envahir par les sciences de la Grèce, se sont des livres seulement qu'elle recevra: elle les lira et les traduira sans y ajouter une seule découverte. Guerriers, poètes, historiens, elle les a eus, oui; mais quelle observation astronomique, quel théorème de géométrie, devons-nous aux Romains? „. Libri, Op. cit., I, p. 186.

(2) Lo riconobbe Cicerone medesimo scrivendo: " In summo onore apud Graecos geometria fuit; itaque nihil mathematicis illustrius: at nos ratiocinandi metiendique utilitate huius artis terminavimus modum „. *Tusc.*, l. I, c. II, 5.

(3) A mostrare come i nostri proavi comprendessero il carattere proprio

in completo oblio, ne va fatto merito agli agrimensori, i quali tuttavia altro intento non si proposero che di raggiungere nelle loro operazioni un'esattezza sufficiente ai quotidiani bisogni della vita civile ed in particolare ad eseguire l'ordine di Augusto, il quale volle fosse attuato l'antico progetto di Giulio Cesare di misurare la superficie dell'impero (1).

L'età di mezzo non può dar materia a più lungo discorso. Le fittissime tenebre che avvolgono in quest'epoca tutta l'umanità non sono attraversate da alcuno sprazzo di luce derivante da qualche scienziato degno di tal nome; a provare quanto basso fosse allora il livello del sapere matematico è sufficiente osservare che fra tutti gli studiosi di quell'epoca appare gigante Gerberto (m. 1003) — più tardi papa Silvestro II — del quale tuttavia indarno si tenta di citare qualche scoperta nel campo delle scienze esatte. Si può però notare che i molteplici monumenti sacri eretti durante il medio evo — i quali, secondo la geniale congettura di un grande poeta, sono così numerosi ed arditi perchè rappresentano l'unico modo d'estrinsecazione allora concessa all'umana intelligenza (2) — fanno fede che quella parte di scienza teorica di cui deve disporre ogni architetto era anche in quei tempi generalmente conosciuta. Però una parola di lode riconoscente dev'essere spesa a favore del popolo Arabo, il quale fece la parte modesta, ma utile epperò non ignobile, di veicolo pel trasporto in Europa della scienza ellèna, nè mancò di arrecare alle nostre cognizioni matematiche (specie nel campo aritmetico) delle aggiunte e delle

---

delle matematiche, basti dire che essi le confondevano con l'astrologia e le arti sorelle; niuna meraviglia adunque se nel Codice di Giustiniano si trovino delle disposizioni raccolte sotto il titolo: *De maleficis et mathematicis et ceteris similibus* e fra esse la seguente: " ars autem mathematica damnabilis interdicta est omnino ". Cfr.: M. Cantor, *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker* (Halle, 1863), p. 397; Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter* (Leipzig, 1874), p. 301. È bene osservare anche che se durante il periodo imperiale si incontra certa investigazione matematica, ne è autore qualche greco.

(1) E appunto alla parte pratica della geometria alludeva il legislatore romano, quando nel Codice precitato scriveva: " Artem geometriae discere atque exercere publice interest ". Cfr. Hankel, l. c.

(2) Si vegga l'ammirabile capitolo intitolato " Ceci tuera cela " di *Notre Dame de Paris*, ove Victor Hugo scriveva fra l'altro: " Il existe à cette époque, pour la pensée écrite en pierre, un privilège tout à fait comparable à notre liberté actuelle de la presse. C'est la liberté de l'architecture ".

modificazioni degne di venire onorevolmente ricordate nei fasti della nostra scienza (1).

7. Questo periodo, così triste per le discipline matematiche, si può dire abbia termine verso il 1200 coll'apparizione di Leonardo Fibonacci da Pisa (1180-1250 circa), abile calcolatore, fine geometra e geniale algebrista; giacchè soltanto allorquando l'algebra, trasportata in Europa da questo eminente scienziato ed i di lui eccellenti lavori esercitarono la loro influenza — e per iscorgerla in modo palese fa mestieri arrivare all'apparizione (1494) della *Summa* di frate Luca Paciuolo (circa 1445-1514) — cominciò un tempo di straordinaria operosità, che noi Italiani dobbiamo ricordare con legittimo orgoglio, perchè allora la patria nostra tenne degnamente lo scettro delle matematiche. Si osservi però che questo periodo, se ha grande importanza per le ricerche analitiche, non assistette ad alcun sensibile progresso del nostro sapere geometrico; e di vero Tartaglia (1500-1557) e Cardano (1501-1576), Scipione Ferro (?-1526) e Lodovico Ferrari (1522-1565), nonchè gli altri geometri minori di questo tempo hanno la gloria d'aver efficacemente contribuito alla fondazione ed allo sviluppo della teoria delle equazioni, non isdegnando di proporre ed accettare delle pubbliche disfide, caratteristica notevole di quest'epoca; ma, per converso, hanno tramandato ai posteri la geometria pressochè nelle condizioni in cui l'avevano ricevuta dai Greci pel tramite degli Arabi. Soltanto si può osservare che, fra le questioni in quest'epoca trattate fra gli scienziati italiani, alcune si riferiscono a costruzioni geometriche da eseguirsi con una sola apertura di compasso; è un concetto che si trova in embrione già in Pappo (v. n. 4), che G. B. Benedetti (morto nel 1590) ha svolto nell'opera *De resolutione omnium Euclidis problematum aliorumque una tantummodo circuli data apertura* (Venezia 1553) e che diede poi origine a *La geometria del compasso* (Pavia 1797) di Lorenzo Mascheroni (1750-1800) — nella quale è dimostrata la possibilità di sciogliere senza riga tutti i problemi della geometria elementare — e, dopo essere stato modificato, a *Die geometrischen*

---

(1) Cfr. Suter, *Die Araber als Vermittler der Wissenschaften in deren Uebergang vom Orient in den Occident* (XXV Jahresheft des Vereins schweiz. Gymnasiallehrer, 1895).

Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises (Berlin 1883) di Jacob Steiner (1796-1863) — opera in cui è indiscutibilmente dimostrato un fatto (quello indicato dal titolo) che, come riconosce ed avverte questo grande geometra, era già stato segnalato dianzi (1).

8. Spenti i valorosi scienziati alle cui opere si deve la risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado, il primato delle matematiche vien raggiunto dalla Francia specialmente per merito di Viète (1540-1603), le cui benemerenze per l'algebra non fa mestieri di qui ricordare, il cui interesse per la geometria è dimostrato dalla costruzione ch'egli immaginò pel cerchio tangente a tre altri, da lui esposto in forma di divinazione nell'opera intitolata *Apollonius Gallus seu exsuscitata Apollonii Pergaei* περὶ ἐπαφῶν *geometria* (Parigi, 1600). Non molto appresso Mydorge (1585-1647), Pascal (1623-1662) (2) e Desargues (1596-1662) raffermano l'egemonia della Francia coll'accrescere il patrimonio della geometria di vedute originali, di metodi nuovi e nuove proposizioni; infatti in *Claudii Mydorgi Conicorum operis etc.* (Parigi 1631-1639) s'incontra, a tacer d'altro, per la prima volta la trasformazione per omotetia di una conica in un'altra; dal *Traité général de la Roulette* di Pascal si apprende una folla di ammirabili proprietà della cicloide, mentre l'applicabilità del metodo di prospettiva allo studio delle sezioni coniche e il celebre teorema che reca il nome di Pascal (benchè l'autore abbia preferito designarlo con quello di " esagrammo mistico ") si legga nel celebre *Essai pour les coniques;* finalmente nelle *Oeuvres de Desargues* (ed. Poudra, Paris 1864) si trovano per la prima volta trattate ad un tempo le tre sezioni coniche, introdotto il concetto d'involuzione di punti e dimostratone l'intervento nella sezione d'un quadrilatero piano con una retta, è applicata non solo la prospettiva, ma con grande larghezza ed abilità l'idea d'infinito (3) come ausiliare potente per la ricerca delle proprietà plastiche dello spazio (4).

(1) Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris, 1822), nn. 351-357.
(2) Cfr. J. Bertrand, *Blaise Pascal* (Paris, 1891).
(3) A Desargues inspiravasi Newton scrivendo " Lineae parallelae sunt quae ad punctum infinite distans tendunt ". *Principia*, libro I, Lemma 22.
(4) A Desargues Poncelet fece risalire il metodo geometrico che consiste

Che anche in Inghilterra e Germania la geometria non fosse caduta in quest'epoca in un completo oblìo è dimostrato dalle lezioni tenute ad Oxford da Enrico Savile (1549-1622), il quale fondò ivi due cattedre di matematica tuttora esistenti, e dalle ricerche geometriche di Giovanni Keplero (1571-1630), al quale si può (1) far risalire il concetto di punto all'infinito della retta.

9. La maggior parte delle idee geometriche esposte ed applicate dai geometri testè citati rimasero per lungo volger d'anni infeconde. Esse furono quasi soffocate dalla grave atmosfera analitica di cui già avvertivasi l'esistenza. Tuttavia, nel sec. XVII la supremazia dell'analisi non è ancora così palese da far dimenticare ai geometri i problemi di cui da tanto tempo e così vivamente desideravasi la soluzione; ond'è che allora fra le tendenze dell'epoca e le aspirazioni degli scienziati nasce una lotta *sui generis*, dal cozzo di sentimenti in parte contradditorî viene generata una scintilla madre d'un incendio destinato ad illuminare l'intero universo (2) e

Di cui la fama ancor nel mondo dura
E durerà quanto il moto lontana:

nasce la geometria analitica.

Benchè già in alcuni procedimenti pratici usati dai pittori e dagli astronomi Egiziani e più tardi dagli agrimensori Romani, nonchè in alcuni metodi che si vedono applicati da geometri greci di primo ordine, quali sono Erone e specialmente Apollonio (3), è facile percepire qualche traccia di ciò che oggi chia-

nel sostituire ad una curva un sistema di rette (*Propr. proj.*, 2ª ed., t. II, Parigi, 1866, p. 128); ma che questa attribuzione, benchè accettata da molti, manchi di solida base, ho rilevato colla nota intitolata *Desargues e la geometria numerativa* inserita nella *Bibl. math.*, 1895.

(1) Cfr. C. Taylor, *Ancient and modern Geometry of Conics* (Cambridge, 1881), pp. LVII-LIX.

(2) Cfr. E. du Bois-Reymond, *Culturgeschichte und Naturwissenschaft* nella raccolta *Rede*, 1, 1886, pp. 207-8.

Intorno alla preistoria della geometria analitica si vegga Günther, *Die Anfänge und die Entwickelungsstudien des Coordinatenprincips* (Abhandl. der Nat. Ges. zu Nürnberg, 6; v. anche Bull. Bonc., 10); le conclusioni di questo lavoro vennero confutate dallo Zeuthen con la *Note sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité et sur l'invention de cet instrument* (Bull. de l'Acad. danoise des Sciences, 1888), a cui replicò il Günther nella *Neue philologische Rundschau*, 1888.

(3) Di vero chiunque studii a fondo il trattato sulle *Coniche* di Apollonio, sarà obbligato a constatare l'analogia profonda che esso presenta con una

miamo sistema di coordinate cartesiane ortogonali; benchè già gli Arabi e gli algebristi italiani del Rinascimento avessero adoperate delle considerazioni geometriche per risolvere graficamente certe equazioni; benchè Viète avesse già adoperate le ascisse per individuare col mezzo di numeri i punti d'una retta e Nicola Oresme (circa 1320-1382) avesse fatto uso più o meno esplicito di coordinate; sembra oggi posto fuori di discussione essere Descartes (1596-1650) (1) e Fermat (1608-1655) (2) i primi che abbiano visto in tutta la sua estensione la possibilità di rappresentare con i segni del calcolo algebrico le forme dello spazio costruite secondo una legge qualunque ed abbiano percepita tutta l'utilità che l'analisi e la geometria potevano ricavare dal loro inatteso connubio (3). Questi giunse forse prima di Descartes al nuovo ramo di matematica, ma quanto pubblicò è posteriore alla celebre *Géométrie* (1637); opera in cui è fatto esplicito cenno dell'equazione d'una curva ed esposta una soluzione del problema *ad tres aut quatuor lineas* così famoso fra gli antichi, è suggerita la distinzione fra curve algebriche e curve trascendenti, è proposta una classificazione delle algebriche, ora abbandonata, adottando la quale si collocherebbero in uno stesso *genere* le curve degli ordini $2n-1$ e $2n$, è insegnato un metodo per tracciare le tangenti alle curve piane che

esposizione delle proprietà delle curve di second'ordine mediante coordinate cartesiane; non soltanto le proprietà fondamentali che al geometra greco servono a distinguere l'une dalle altre le tre curve, si traducono nelle equazioni canoniche delle medesime nel metodo di Descartes, ma molti dei ragionamenti esposti, quando siano tradotti nell'ordinario linguaggio algebrico, si riscontrano per equivalenti ad eliminazioni, risoluzioni di equazioni, trasformazioni di coordinate e simili. Ciò che però si cercherebbe invano nel geometra greco è il concetto di un sistema d'assi, dato *a priori*, indipendentemente dalla figura da studiare.

(1) Cfr.: Jacobi, *Ueber Descartes Leben und seine Methode, die Vernunft richtig zu leiten und die Wahrheit in den Wissenschaften zu suchen* (Ges. Werke, 7, 1891; v. anche Journ. de Math., 12, 1847), Arago, *Œuvres complètes*, 3, Paris, 1855.

(2) Arago, l. c. Inoltre *Œuvres de Fermat* (ed. J. Tannery e C. Henry), 1 (Paris, 1891) e 2 (1894).

(3) Che l'*Analysis geometrica, sive nova et vera methodus resolvendi tam problemata geometrica quam arithmetica quaestiones*, di Hugo de Omerique (1634-?), di cui nel 1698 uscì a Cadice la 1ª parte, basti a far apparire il suo autore per il precursore della moderna geometria analitica (come sostenne P. A. Berenguer nell'articolo intitolato *Un geómetra español del siglo XVII* inserito in Progréso, 5, 1895) è questione non ancora risoluta, perchè a ciò sarebbe necessario conoscere la 2ª parte di quell'opera, la quale invece non vide ancora la luce.

viene poi applicato alla concoide ed alle ovali di Cartesio, nè è taciuto della estendibilità allo spazio del metodo delle coordinate; invece nella memoria di Fermat *Ad locos planos et solidos isagoge* (in *Varia opera,* 1679) è fatto conoscere più chiaramente che nella *Géométrie* il concetto d'equazione d'una curva, inoltre è adoperata l'equazione della retta, è discussa l'equazione generale di secondo grado a due indeterminate, ed è applicato il metodo delle coordinate alla soluzione delle equazioni. Se si aggiunge che Fermat seppe scoprire e correggere alcuni errori in cui era incorso Descartes, si vedrà ch'è piuttosto ad un caso fortunato che al vero merito che si deve se la scoperta della geometria analitica, invece che al nome di Fermat, si considera come indissolubilmente collegato a quello dell'autore del *Discours de la méthode.*

La facilità colla quale il nuovo strumento matematico permette di risolvere dei problemi che esorbitavano le forze degli antichi, fece abbandonare alla generalità dei contemporanei e degli immediati successori di Descartes e Fermat le vie aperte da Euclide e da Apollonio; essi preferirono mettersi per la nuova strada che da un lato si presentava piana e facile a percorrere (1), e d'altro lato li tentava per gli ostacoli di cui era tuttora cosparsa e che sembrava importantissimo di eliminare. Fra questi primi cultori della geometria analitica spiccano G. Wallis (1616-1703) per il suo *Tractatus de sectionibus conicis nova methodo exposita* (1655), Florimond de Beaune (1601-1652) e Francesco van Schooten (?-1661) grazie ai loro *Commenti* a Cartesio e meglio ancora Giovanni De Witt (1625-1672) pei suoi *Elementa curvarum linearum* (1658).

10. I procedimenti d'indagine matematica fondati sull'uso metodico dell'infinito e dell'infinitesimo, applicati in un modo particolare nell'antichità da Archimede e preparati molti secoli

(1) " Ainsi, à certaines époques, où, après de grands efforts, les sciences mathématiques semblent avoir épuisé toutes les ressources de l'esprit humain et atteindre le terme marqué à leurs progrès, tout à coup une nouvelle méthode de calcul vient s'introduire dans ces sciences et leur donner une face nouvelle. Bientôt on les voit s'enrichir rapidement par la solution d'un grand nombre de problèmes importants dont les géomètres n'avaient osé s'occuper, rebutés par la difficulté ", Condorcet nell'*Éloge de M. Euler.*

dopo dalla *Stereometria doliorum* (1615) di Keplero e dalla *Geometria indivisibilibus etc.* (1635) di Bonaventura Cavalieri (1598-1647), dai metodi per costruire le tangenti alle curve immaginati da Descartes e da quelli che Fermat suggerì per la ricerca dei massimi e dei minimi (1), infine dalle indagini di Roberval (1602-1675) (2), di Torricelli (1608-1647) (*Opera geometrica,* 1644), di Gregorio a S^to^. Vincentio (1584-1667) (*Opus geometricum,* 1647), di Wallis (*Arithmetica infinitorum,* 1655), di Pascal, ecc., ed inventati, poco dopo l'apparizione della *Géométrie* di Descartes, contemporaneamente da Leibniz (1646-1716) (3) e Newton (1642-1727) (4) accentuarono l'indirizzo caratterizzato nel n. prec., facendo porre in non cale tutti quei problemi la cui soluzione non era adatta a dar risalto all'onnipotenza dei metodi che il mondo deve a queste menti immortali. Tanto che si può dire che, fatta eccezione pei *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1686) di Newton e per alcuni accenni di Leibniz (5) ad una " Characteristica geometrica ", per alcune pagine di Huygens (1629-1695) (6) e di Maclaurin (1698-1746) (7) nonchè finalmente per alcune memorie di Stewart (1717-1785) (8) e di de La Hire (1640-1718) (9) e per alcuni tentativi intesi a far rivi-

---

(1) Cfr. l'interessante nota dello Zeuthen, *Sur les quadratures avant le calcul intégral et en particulier sur celles de Fermat* (Bull. de l'Acad. danoise des Sciences, 1895).

(2) Mém. de l'Acad. des Sciences, 6, Paris, 1630.

È importante tenere presente che alcune inesattezze che si leggono nelle *Observations sur la composition des mouvements, et sur les moyens de trouver les touchantes des lignes courbes* del Roberval furono rettificate dal Duhamel (1797-1872) nella *Note sur la méthode des tangentes de Roberval* (Mém. des Sav. Étr., 5, Paris 1838).

(3) Cfr. Fontenelle, *Eloges des académiciens* (La Haye, 1740), 1; Harnack, *Leibniz' Bedeutung in der Geschichte der Mathematik* (Dresden, 1887).

(4) Cfr.: Fontenelle, Op. cit., 2; Arago, *Œuvres complètes,* 3 (Paris, 1855); Brewster, *The Life of Sir I. Newton* (London, 1831) e *Memoirs of the Life, Writings and Discoveries of Sir I. Newton* (Edimburgh, 1855).

(5) *Mathematische Schriften* (ed. Gerhardt) 5, p. 141-171.

(6) V: specialmente *Horologium oscillatorium* (Parigi, 1673) e *Traité de la lumière* (Leyde, 1691).

(7) V. *A complete Systhem of Fluxions* (Edinburgh, 1742).

(8) *General Theorems of considerable Use in the higher Parts of Mathematics* (Edinburgh, 1746; v. l'analisi fattane dal Breton (de Champ) nel *Journ. de Math.,* 13, 1848, nonchè un pregevole articolo su di essa di T. S. Davies, nelle *Trans. of Edinburgh,* 15, 1844); *Propositiones geometricae more veterum demonstratae* (Edinburg, 1763).

(9) Cfr. — oltre Fontenelle, Op. cit., 2 — E. Lehmann, *De la Hire und seine Sectiones conicae,* I Th., Leipzig, 1888; II Th., Leipzig, 1890. Del De la

vere la geometria antica, ai quali fra un momento dedicheremo alcune linee, nessuna eminente produzione matematica del tempo di cui stiamo parlando appartiene alla geometria sintetica pura.

I tentativi a cui or ora alludemmo s'incontrano, si può dire, in ogni secolo, a partire dal Rinascimento, e si manifestano sia sotto forma di edizioni e commenti agli antichi geometri, sia sotto quella di divinazioni di opere che non si sottrassero all'ingiuria del tempo. Delle edizioni e dei commenti non è qui luogo di tener parola, ma alle divinazioni è obbligo di consacrare qualche linea (1), in primo luogo perchè ne è indiscutibile il significato quando portano i nomi di Maurolico (1494-1575), Viète, Fermat (1637-1768), Schooten, Viviani (1622-1703), Halley (1656-1724), Simson (2), Horseley (1733-1807), ed in secondo luogo perchè la loro comparsa è il primo indizio d'un risvegliarsi dello spirito di ricerca geometrica. E di vero è un fenomeno che ci sembrà degno della più seria considerazione questo che in tale stadio di sopore che precede il risveglio, gli scienziati non riescono a sottrarsi al fascino esercitato dai più antichi investigatori, ed in conseguenza si sforzano di calcarne le orme e perfino d'imitarne le movenze e gli atteggiamenti. Si sarebbe perciò indotti a congetturare che nella vita intellettuale delle nazioni avvenga qualche cosa di analogo a ciò che l'embriologia insegna verificarsi nella vita fisica d'ogni vivente; nello stesso modo che ogni essere organizzato, avanti di acquistare vita autonoma ed indipendente, ripassa per tutte le fasi di sviluppo che attraversò la specie a cui egli appartiene prima di raggiungere lo stato fisico della generazione a cui egli dovrà appartenere, così parrebbe che ogni popolo prima d'acquistare la capacità d'accrescere le nostre cognizioni sui fenomeni che presenta l'esten-

---

Hire vanno ricordati qui i seguenti scritti: *Sectiones conicae in novem libros distributae*, 1685; *Mémoire sur les épicycloïdes*, in Anc. Mém. de Paris, 9; *Traité des roulettes*, in Nouv. Mém. de Paris, 1706.

(1) Maggiori particolari si troveranno nelle Appendici ai primi due libri del mio lavoro già citato sopra *Le scienze esatte nell'antica Grecia*.

(2) Riguardo agli sforzi fatti da Simson e Stewart per dar nuova vita all'antica geometria, si veggano le osservazioni del Buckle in *History of Civilisations in England*, 4. Aggiungiamo che la lotta in Inghilterra fra analisti e sintetici si è prolungata assai nel nostro secolo; lo provano le due opere rivali: *Geometrical Analysis and Geometry of curve lines by J. Leslie* (Edinburg, 1821) e *A Treatise on algebraic Geometry by D. Lardner* (London, 1831).

sione figurata, debba per qualche tempo assumere le parvenze ed i modi d'agire di chi prima di lui percorse il medesimo cammino. Accettata per vera questa legge di sviluppo, si evita di ascrivere fra i ruderi ciò che invece è un germe e si arriva a rendersi ragione di certi fatti che altrimenti sarebbero da giudicarsi per sorprendenti anacronismi. E fra questi nessuno ci sembra più degno di menzione di quello offerto dalla " Scuola napoletana „ tanto pregiata da Chasles (1), che ebbe a duce supremo Nicola Fergola (1753-1822) e per capi secondarî o gregarî Annibale Giordano, Vincenzo Flauti (1782-1863), Felice Giannattasio (1759-1849), Giuseppe Scorza (1781-1843) ed altri i cui nomi per brevità si tacciono (2); scuola la quale sarebbe da collocarsi fra quelle che ebbero ben piccola influenza sulla geometria ove non dovesse invece, secondo il nostro modo di vedere, ritenersi per rappresentante uno stadio che la matematica del mezzogiorno d'Italia doveva necessariamente attraversare prima di essere pronta a combattere per la conquista di nuovi veri.

11. Ma è d'uopo che noi ritorniamo indietro per determinare quale sia stata l'influenza sullo sviluppo della geometria del concetto fondamentale dell'analisi infinitesimale, il quale da un grande filosofo e matematico è giudicato come il pensiero più sublime a cui lo spirito umano siasi fino ad oggi innalzato (3). Non si può negare che l'apparizione di esso abbia distratto dalla geometria pura la generalità dei matematici (4); cionullameno il periodo che tenne dietro ad essa si deve senza esitazione annoverare fra i più lieti per la geometria, giacchè la maggior parte dei problemi proposti o risoluti da Newton e Leibniz e dai loro immediati discepoli sono da ascriversi fra i più importanti che abbracci la geometria, riferendosi alle più recondite e interessanti proprietà geometriche o meccaniche delle curve e delle superficie. Vediamo in conseguenza, non soltanto aumentare straordinariamente il

(1) *Aperçu historique*, 2e éd. (Paris, 1875), p. 46.
(2) Per ulteriori notizie rimando al mio lavoro intitolato *Nicola Fergola e la scuola dei matematici che lo ebbe a duce* (Genova, 1892).
(3) Comte, *Cours de philosophie positive*, 1 (Paris, 1864), p. 175.
(4) Ciò reca una nuova conferma all'osservazione di Condorcet che riferimmo in nota nella chiusa nel n. prec.

numero delle curve oggetto di studio (1), ma (il che è ben altrimenti importante) introdursi la considerazione di singolarità d'una curva e di nuovi elementi ad essa collegati (cfr. il Cap. seg.), e svelarsi in conseguenza dei campi di ricerca di cui dianzi non supponevasi nemmeno l'esistenza.

Le agevolazioni arrecate dal metodo cartesiano alle investigazioni attinenti alla geometria del piano, le quali apparvero in luce meridiana quando i metodi infinitesimali vennero nel dominio del pubblico, spinsero naturalmente gli scienziati a procacciarsene uno analogo per lo studio delle curve sghembe e delle superficie curve. Donde lo stimolo alla generalizzazione allo spazio del metodo delle coordinate che, come dicemmo, non era sfuggita a Déscartes, e che lo Schooten avvertì esplicitamente nell'ultimo libro delle sue celebri *Exercitationum mathematicarum* (1657); donde l'origine dell'idea del Parent (1666-1716) (2) di rappresentare qualsia superficie mediante una equazione fra le tre coordinate d'un suo punto qualunque (3).

A questo momento di preparazione della geometria analitica dello spazio tien dietro il primo periodo di sviluppo, nel quale fungono da corifei Clairaut (1715-1765) ed Eulero (1707-1783) (4). Quegli nel 1731, cioè a soli 16 anni, pubblicò un *Traité des courbes à double courbure*, che fu giudicato degno di essere ammi-

---

(1) Le linee che i Greci conobbero sono — a tacere della retta e della circonferenza — le tre sezioni coniche, la spirale d'Archimede e l'analoga curva sferica, la concoide, la cissoide, ed una quadratrice, inoltre una curva sghemba di Archita, l'ippopeda di Eudosso e l'elica cilindrica; a cui altre se ne potranno unire quando saranno risolte in senso favorevole agli antichi alcune questioni tuttora pendenti. A queste linee i moderni aggiunsero varie specie di iperbole, di parabole, di spirali (p. es. quella logaritmica) e di quadratrici (fra cui spicca quella di Tschirnhausen), poi il foglio e le ovali di Cartesio, la cicloide (cfr. Günther in Bibl. Math., 1887), la lossodromia, la curva elastica, la catenaria, la cardioide, le epicicloidi e le ipocicloidi, le ovali di Cassini (in particolare la lemniscata), la sinusoide, la logaritmica, la *versiera* di Maria Gaetana Agnesi (1718-1799) (*Istituzioni analitiche*, 1, p. 380), certe curve piane e sferiche a cui Guido Grandi (1671-1742) fu condotto tentando sciogliere il famoso enigma fiorentino (v. l'opera: *Flores geometrici, etc.*, Firenze, 1728), poi altre che Vincenzo Viviani ed un suo amico proposero come ausiliari nella risoluzione del problema di Delo (v. *Quinto Libro di Euclide, ovvero Scienza universale delle proporzioni spiegata colla dottrina del Galileo da V. V.*, Firenze, 1647), la spirale parabolica (cfr. Weyer, *Ueber die parabolische Spirale*, Kiel und Leipzig, 1894), ecc. ecc.

(2) Fontenelle, op. cit., 1.

(3) *Essais et recherches de mathématique et physique*, 2 (Paris, 1713).

(4) N. Fuss, *Eloge de M. Euler* (St. Pétersbourg 1783).

rato come un prodigio d'immaginazione e di capacità, nel quale sono risoluti con eleganza rara molti fra quei problemi relativi alle curve a doppia curvatura che trovano i loro corrispondenti nel piano ed altri ancora affatto nuovi; questi corredò di un'*Appendice de superficiebus* il secondo libro della sua celebre *Introductio in analysin infinitorum* (Lausannae 1748), nella quale appendice, non solo espose alcune generalità intorno alla trattazione analitica della teoria delle superficie, ma ne fece un'importante applicazione allo studio ed alla classificazione delle quàdriche; nè è da tacersi che questo stesso famoso scienziato colle memorabili *Recherches sur la courbure des surfaces* (inserite nei Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin, 16, 1760) ha gettato i fondamenti per lo studio della curvatura d'una superficie in un suo punto, legando il proprio nome ad una relazione che, per l'uso continuo che se ne fa, è conosciutissima da tutti coloro che per poco siansi occupati di matematica.

Alla seconda metà del secolo XVIII appartiene eziandio in buona parte la gigantesca opera scientifica di Monge (1746-1818) (1), il quale, dopo aver fatto prendere alla geometria analitica del piano l'aspetto che essa in certa misura conserva tuttora, usando sistematicamente l'equazione della linea retta, introdusse la nozione così importante di *famiglia di superficie*, e, studiando alcune speciali famiglie (superficie rigate, sviluppabili, tubulari, modanate, ecc.), mise allo scoperto un nesso intimo e inaspettato perchè recòndito, fra la teoria delle superficie e l'integrazione delle equazioni a derivate parziali, il quale, lumeggiò così quella come questa dottrina, svelò ai geometri dei nuovi fulgenti orizzonti.

12. Il movimento intellettuale che partì dall'Italia nell'epoca del Rinascimento continuò, come testè dicemmo, sotto la direzione della Francia dapprima, dell'Inghilterra e della Germania da poi. Ma sul finire del secolo XVIII, dopo che Eulero ebbe cessato di " calcolare e di vivere " (2) e che il nostro Lagrange

(1) Cito qui i lavori inseriti nei *Mém. des Sav. étrangers*, 7, 1776 e 9, 1780 e nei *Mém. de Paris*, 1784, nonchè quelli che si trovano nei *Miscellanea Taurinensia*, 5 e nei *Mém. de l'Acad. de Turin*, 1. Dell' " opus magnum " in cui sono riassunte e completate tali ricerche verrà discorso colla dovuta larghezza nel Cap. V.

(2) Espressione usata da Condorcet nel suo *Éloge de M. Euler*.

(1736-1813) ebbe trasportate le sue tende in Francia, questa ritornò a porsi alla testa del mondo matematico. Non soltanto con Clairaut, d'Alembert (1) (1716-1783), Condorcet (1743-1794) (2), Laplace (1749-1827), Legendre (1752-1833), Ampère (1775-1836) (3), Poinsot (1777-1759), Poisson (1781-1840) (4), ed altri minori essa dà l'intonazione agli studî di analisi superiore e fisica matematica, ma riconduce gli scienziati allo studio delle forme geometriche nel senso — " mutatis mutandis „ — in cui l'intendevano i dotti dell'antichità, per opera di Monge (5), Carnot (6), (1753-1823) — discepolo di Monge alla scuola del genio di Mézières — e Poncelet (7) (1788-1867), splendida triade sulle cui memorabili produzioni è dover nostro arrestarci un istante.

Il primo, coll'adunare in un corpo di dottrina le poche regole di prospettiva che gli architetti ed i pittori si erano creati spinti dai bisogni che sentivano nel coltivare le loro arti, e col riempire in modo felicemente geniale le molte gravi lacune che il loro insieme presentava, collegò il proprio nome a una nuova diramazione della geometria, la geometria descrittiva (8). Non è il caso di riassumere il primo trattato conosciuto di tale scienza; noteremo soltanto che, se la pubblicazione di esso ebbe un movente pratico, quasi nazionale (9), alla nuova scienza Monge attribuiva anche un valore teorico derivante dalla facilitazione che essa arrecava a concepire e quindi studiare le figure geometriche, scienza di cui egli ebbe cura di paragonare i procedimenti con quelli proprî all'analisi, mostrando

(1) J. Bertrand, *D'Alembert* (Paris, 1889).
(2) Arago, op. cit., 2, 1854.
(3) Arago, l. c.
(4) Arago, l. c.,
(5) Cfr.: Charles Dupin, *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge* (Paris, 1819); Arago, l. c.; K. Fink, *Monge* (Korresp.-Bl. f. d. Gel. und Realschule, Tübingen, 1892, pp. 263-289, 339-359).
(6) Arago, op. cit. 1, 1854; K. Fink, *Lazare Nicolas Marguerite Carnot. Sein Leben und seine Werke nach den Quellen dargestellt* (Tübingen, 1894).
(7) Cfr. E. Holst, *On Poncelet's Betyding for Geometrien* (Christiania, 1878); Bertrand, *Éloges académiques* (Paris, 1890).
(8) Chi desidera maggiori particolari intorno alla preistoria ed alla storia della geometria descrittiva, ricorra alla 1ª sezione del vol. I (Leipzig, 1884) del *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* di Chr. Wiener. Qui basti ricordare *La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois ou Traité de stéréotomie* (1738-39) del Frézier (1682-1773).
(9) Infatti il *Programme* ad essa premesso comincia con le parole: " Pour tirer la nation française de la dépendance où elle à été jusqu'à présent de l'industrie étrangère etc. „ (Monge, *Géométrie descriptive*, Paris, an VII).

l'identità essenziale degli uni e degli altri. Col classico libro ora ricordato e meglio ancóra colle impareggiabili lezioni alla Scuola politecnica di Parigi (1), di cui egli fu uno dei primi e più splendidi ornamenti (2), egli ripose in onore lo studio della geometria fondato sulla considerazione diretta delle figure che ne sono l'oggetto, ed agevolando la concezione delle figure geometriche a tre dimensioni preparò l'applicazione di considerazioni stereometriche alla ricerca delle proprietà delle figure piane che Pappo aveva intravveduta soltanto (v. n. 5) e che rappresenta oggi uno dei più fecondi metodi di investigazione e dimostrazione che vanti la geometria (3).

A lato della *Géométrie descriptive* di Monge va collocata la *Géométrie de position* (Paris, 1803) di Carnot, avendo questa comune con quella il fine di far acquistare alla geometria quella generalità di concetti e di metodi ed in conseguenza quel procedere svelto e disinvolto che credevansi esclusivi dell'algebra. Il lettore

---

(1) Cfr.: Arago, op. cit., 3, 1855, p. 70 e seg.; Jacobi, *Ueber die Pariser polytechnische Schule* (Ges. Werke, 7, Berlin, 1891, pp. 355-370).

(2) Monge ebbe per collaboratori nella sua opera riformatrice parecchî colleghi — fra gli altri Lacroix (1765-1843) e Hachette (1769-1834) — e molti allievi. Fra questi è giustizia di far qui cenno particolare di Carlo Dupin (1784-1873) che " sopra gli altri com'aquila vola ", grazie specialmente alle sue due opere *Développements de géométrie* (Paris, 1813) e *Applications de géométrie et de mécanique* (Paris, 1822) di cui avremo occasione di parlare più innanzi; qui intanto ricordiamo l'elogio che di lui scrisse il Bertrand (*Éloges académiques*, Paris, 1890) e l'articolo *Dupin* di K. Fink (Corresp.-Bl. f. d. Gel. und Realsch., 1893, pp. 1-27). Nè possiamo esonerarci dal fare onorevole menzione anche del *Mémoire sur les lignes du second ordre* (Paris, 1817) e dell'*Application de la théorie des transversales* (Paris, 1818) del Brianchon (1783-1864), scritti di cui il primo contiene i fondamenti di una teoria sintetica delle sezioni coniche, con ispeciale riguardo alle loro costruzioni, fondate in parte sul teorema di Pascal e suo correlativo (che il Brianchon stesso fece conoscere nel XIII cah. del *Journ. Éc. pol.* e poi generalizzò nel t. IV delle *Ann. de Math.*), in parte sul rapporto anarmonico; mentre il secondo intende mostrare di qual fecondità nelle costruzioni siano i teoremi di Menelao e di Ceva, intende cioè ad un fine analogo a quello a cui mirava il Servois (1767-1847) nel comporre le sue *Solutions peu connues de différents problèmes de géométrie pratique* (Paris, 1805).

(3) L'influenza di Monge non si limitò alla Francia e ai paesi limitrofi; lo provano gli scritti di Garbinski (1796-1848) e Sapalski (1791-1838), cioè l'*Esposizione sintetica delle proprietà delle superficie rigate* (Varsavia, 1822) del primo e l'eccellente *Trattato di geometria descrittiva* (Varsavia, 1822 e 1849) del secondo. Di più tale influenza non si spense presto, giacchè la si può ravvisare anche nei metodi di insegnamento della geometria elementare; lo prova il tentativo di abbattere l'antica rigorosa separazione fra planimetria e stereometria fatto per la prima volta dal Bretschneider (1808-1878) nel 1844, ripetuto più tardi dal Frischauf e condotto a buon termine nel 1884 dal De-Paolis con i suoi eccellenti *Elementi di geometria* (Torino).

che conosce soltanto il titolo dello scritto geometrico più importante dell' " organizzatore della vittoria „ può credere che il tema di esso coincida con quello che svolgono le opere moderne di geometria proiettiva. Nulla di più inesatto; l'intento che si è prefisso Carnot è di determinare la scambievole dipendenza che esiste fra i differenti aspetti che può assumere una figura soddisfacente a certe condizioni in corrispondenza alle varie posizioni di cui sono suscettibili i dati, studio capace di esonerare dall'enumerazione minuziosa dei varî casi di figura, a cui erano astretti i geometri dell'antichità. Tale scopo viene oggi raggiunto per una strada assai più piana e luminosa, cioè mediante l'uso metodico dei segni in geometria; donde la ragione per cui la *Géométrie de position* non presenta oggi che poco più d'un interesse storico e debba venir ricordata meno per le idee che intende propugnare che per le applicazioni ivi esposte, fra le quali ci piace qui ricordare i principî della poligonometria e della poliedrometria, la teoria dei baricentri e la teoria delle trasversali, di cui è parte cospicua la celebre proposizione che oggi si designa col nome di teorema di Carnot (1). Giova ancora osservare qui che la memoria *De la corrélation des figures de la géométrie* (Paris, 1801) è un primo abbozzo della *Géométrie de position,* mentre la *Lettre du citoyen Carnot au citoyen Bossut* (Paris, 1799) ed il *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace* (Paris, 1806) hanno con questa molteplici punti di contatto; che poi di essa formino parte integrante, come taluno opina, le *Reflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* (Paris, 1797) è cosa che non si può accettare senza maturo esame e lunga discussione.

Gli scritti di Monge e Carnot prepararono efficacemente il risorgimento della geometria pura; questo devesi far datare dall'apparizione (1822) del *Traité des propriétés projectives des figures* di Poncelet (2). A convincere il lettore di quanto sia memorabile questa data, basterà osservare che gli è nella grande

---

(1) Crediamo opportuno far anche notare che Carnot adopera la parola *equipollenza* in senso analogo a quello in cui assai più tardi la usò il Bellavitis.

(2) Soltanto di passaggio ricordiamo l'aspra guerra che venne mossa a quest'opera appena essa uscì, la quale in gran parte è dovuta al non essere state le idee del Poncelet abbastanza comprese.

opera di Poncelet che è dimostrata la potenza della proiezione centrale e del principio di continuità come strumenti di ricerca ed ausiliari nelle dimostrazioni (1); che ivi lo studio approfondito dell'omologia nel piano e nello spazio funge non solo da preludio ma anche da efficacissima preparazione allo studio delle corrispondenze univoche fra due varietà ad egual numero di dimensioni (cfr. Cap. VIII); che ivi ancora le antiche nozioni intorno alla polarità rispetto ad una conica e quelle scoperte nella scuola di Monge intorno alla polarità rispetto ad una quàdrica preparano la legge di reciprocità che, riconosciuta dal Viète (2), da Filippo van Lansberg (1561-1632) (3), e dallo Snellio (1581-1626) (4) nella geometria della sfera, era destinata a venir enunciata in tutta la sua generalità e chiamata col nome di *principio di dualità* quattro anni più tardi (v. *Ann. de Math.*, 17) da Gergonne (1771-1859) (5). Mentre importanza piuttosto transitoria ebbero le considerazioni svolte da Poncelet sulle corde ideali delle sezioni coniche, su cui dovrà arrestarsi chi narrerà la storia della teoria degli immaginarî nella geometria, per converso grande valore si deve attribuire al *Supplément* dell'opera in discorso, dal quale fra l'altro si apprende l'esistenza di quattro coni in qualsiasi fascio di quadriche; pure valore permanente posseiedono le investigazioni intorno ai poligoni inscritti in una conica e circoscritti ad un'altra; anzi, se il posto devoluto ad una ricerca matematica devesi determinare, non tanto in base al valore intrinseco di cui sembra in possesso, quanto piuttosto per l'originalità sua e la novità e varietà delle investigazioni che

(1) Se gli antichi sapessero sfruttare la prospettiva nelle ricerche teoriche è questione che non possiamo qui esaminare (cfr. Chasles, *Aperçu historique*, 2ª ed., p. 74, nota); la questione analoga pel principio di continuità venne studiata da C. Taylor nella nota *On the History of geometrical Continuity* (Cambridge Proc. 1880 e 1881) e nella prefazione (pp. LXXIII e segg.) dell'opera *Ancient and Modern Geometry of Conics*, ove, fra l'altro, sono descritti gli sforzi fatti dal Boscovich (1711-1787) per porre in sodo il principio anzidetto.

(2) *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber octavus* (Tours, 1593).

(3) Cfr. K. Fink, *Kurzer Abriss der Geschichte der Elementar-Mathematik* (Tübingen, 1890), p. 196.

(4) *Doctrina triangolorum canonica* (Leyden, 1627).

(5) Altri particolari sull'origine del principio di dualità si trovano nelle *Vorlesungen über continuirliche Gruppen* del Lie redatte da G. Scheffers (Leipzig, 1893), opera in cui è anche esposta una importantissima generalizzazione della relazione dualistica. Si vegga pure: *Julius Plückers Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen*, 1 (Leipzig, 1895), p. 619.

da essa rampollano, all'argomento da ultimo citato spetta una posizione a ben pochi seconda. Ed è per ciò e per essere estremamente istruttivo il contemplare tutte le facce che la matematica moderna seppe scoprire in un solo ed umile soggetto, che noi vogliamo arrestarci qualche istante sui così detti *poligoni di Poncelet* (1).

13. Il problema: " Date in un piano due sezioni coniche, costruire un poligono d'un determinato numero di lati, il quale sia inscritto in una delle date curve e circoscritto all'altra ", sembra determinato, e fin dal 1817 Poncelet lo annoverava (2) fra quelli a cui si potevano applicare i metodi che egli stava allora elaborando; ove però si ricordi che, se le due coniche sono cerchi, affinchè esso sia possibile devono i dati soddisfare a una certa relazione (3), nasce il sospetto che anche nel caso generale abbia luogo qualche cosa di analogo. Ed infatti cinque anni dopo Poncelet dimostrò che il problema enunciato non ammette generalmente parlando alcuna soluzione, ma che, ove ne abbia una, ne possiede infinite (*Traité des propr. proj.*, nn. 530 e seg.; cfr. *Applications* citate, 1, Paris, 1862, p. 348 e seg.). Questa memorabile scoperta non passò inosservata; lo prova il fatto che non trascorsero più di sei anni dal momento in cui venne a conoscenza del pubblico, che Jacobi nel corso delle sue memorande ricerche intorno alla teoria delle funzioni ellittiche osservò — nel celebre lavoro *Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementar-Geometrie* (Journ. f. Math., 3, 1828) — come questa fosse in grado di somministrare una soluzione generale completa (anzi l'unica esplicita, vale a dire non per via ricorrente, che ancor oggi si

(1) Per maggiori particolari si ricorra alla *Note historique, critique et philosophique*, inserita da Poncelet nelle *Applications d'analyse et de géométrie, etc.* 1 (Paris 1862), all'opuscolo dell'autore intitolato *I poligoni di Poncelet* (Torino, 1889), ed al complemento pubblicato nella *Bibliotheca mathematica*, 1889, col titolo *Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet.*

(2) *Réflexions sur l'usage de l'analyse algébrique en géométrie*, inserite prima nelle *Ann. de Math.*, 8, 1817, e poi nelle *Applications d'analyse et de géométrie*, 2 (Paris, 1864), p. 466.

(3) Pel caso di un triangolo essa venne scoperta da Eulero (Nov. Comm. Petrop., 2, 1751) e per gli altri poligoni venne cercata dal suo discepolo Nicola Fuss (1755-1826) (Nova Acta Petrop., 10, 1794, pubbl. 1797, e 13. 1798, pubbl. 1827) e trovata in parte da Steiner (Journ. f. Math., 2, 1827),

conosca) del problema che consiste nel cercare la relazione esistente tra i raggi e la distanza dei centri di due circonferenze che ammettono un poligono di Poncelet di un numero dato n di lati; e poichè, come pensava Laplace, " le scoperte consistono nel ravvicinare delle idee capaci di riunirsi e che dianzi erano disgiunte ", all'osservazione di Jacobi si deve senza esitare dare il nome di scoperta. Niuna meraviglia devesi in conseguenza sentire notando come lo scritto testè citato sia stato giudicato da Legendre meritevole di venire compendiato in uno dei supplementi alla terza edizione (1827-1832) della sua voluminosa *Théorie des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes,* e se il Richelot (1808-1875) abbia giudicato opportuno dedicare due memorie (1) a svolgere e completare le idee del proprio maestro e mostrare anzi come esse potessero venire applicate a sciogliere gli analoghi problemi della geometria sferica.

Al termine della memoria dianzi ricordata Jacobi rilevò che per la teoria delle funzioni ellittiche sarebbe stato interessantissimo istituire su due coniche delle considerazioni analoghe a quelle da lui svolte per due circonferenze, dichiarandosi anzi disposto a ritornare lui stesso sull'argomento; ma poi, attratto probabilmente da problemi più importanti, non mise ad esecuzione il suo progetto, il quale per quasi quarant'anni attese indarno chi lo eseguisse; finalmente nel 1865 Rosanes e Pasch diedero nella notevole memoria *Ueber das einem Kegelschnitte umbeschriebene und einem anderen einbeschriebene Polygon* (Journ. f. Math., 64) una soluzione trascendente del problema, che consiste nella ricerca della relazione cui debbono soddisfare i coefficienti di due coniche affinchè inscritto nell'una si trovi un poligono di n lati circoscritto all'altra, generalizzando all'uopo il metodo inventato da Jacobi. Inoltre gli or citati geometri adoperarono le funzioni ellittiche Jacobiane (2); che allo stesso risultato si possa pervenire adoperando le funzioni analoghe preferite da Weierstrass,

---

(1) *Anwendung der elliptischen Transcendenten auf die sphärischen Polygone, welche zugleich einem kleinen Kreise der Kugel eingeschrieben und einem anderen umgeschrieben sind* (Journ. f. Math., 5, 1830); *Ueber die Anwendung einiger Formeln aus der Theorie der elliptischen Functionen auf ein bekanntes Problem der Geometrie* (Ib., 38, 1849).

(2) Altrettanto può ripetersi riguardo a Rogers, *Note on the Porism of the Inscribed and Circumscribed Polygon* (Proc. L. M. S, 16, 1884-85).

lo dimostrarono prima il Simon (1) e poi l'Halphen (1844-1889) (2) nel secondo volume (Paris, 1888) del classico suo *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications* (3).

Avendo nella nostra esposizione preferito l'ordine logico a scapito dell'ordine cronologico, fa d'uopo che ritorniamo indietro qualche decennio per far cenno dei lavori estremamente eleganti di Nicola Trudi (1811-1884) (4), e di quelli di A. Cayley (1821-1895) (5) non meno interessanti, ma assai più conosciuti e che ognor più si diffonderanno per essere adunati fra le opere di questo celebre scienziato (vedi i vol. 2, 3, 4, 5, 8); riguardo a tali lavori ci limiteremo a far noto come da quelli del geometra inglese si impari a scrivere sotto forma di determinante l'invariante simultaneo di due forme ternarie quadratiche, il cui annullarsi annuncia che le coniche da queste rappresentate ammettono un poligono di Poncelet di dato ordine.

Risultati analoghi ottennero: il Mention nell'*Essai sur le problème de Fuss* (Petersb. Bull., 1, 1860) utilizzando un'osservazione esposta dal Tchébycheff (1821-1894) nell'articolo *Sur la série du problème de Fuss* (Id., ib.); il Puiseux (1820-1883) nella *Note sur les polygones qui sont à la fois inscrits dans un cercle et circonscrits à un autre cercle* (Annales de la Soc. scient. de Bruxelles, 3e ann., 1878-79, 2e partie); il Kluyver nella memoria *Over de*

---

(1) *De relationibus inter constantes duarum linearum secundi ordinis ut sit polygonum alteri inscriptum circumscriptum alteri* (Diss. Berlin, 1867), e *Ganzzahlige Multiplication der elliptischen Functionen in Verbindung mit dem Schliessungsproblem* (Journ. f. Math., 81, 1876). Cfr. Gundelfinger, *Ueber das Schliessungsproblem bei zwei Kegelschnitte* (Ivi, 83, 1877).

(2) C. Jordan, *Georges Halphen* (Journ. de Math., IV, 5, 1889); *Liste des travaux mathématiques de Georges-Henri Halphen* (Palermo Rend., 3, 1889).

(3) V. anche Vivanti, *Sull'applicazione della funzione ellittica* pu *alla teoria dei poligoni di Poncelet* (Palermo Rend., 7, 1893).

(4) *Sui poligoni iscritti e circoscritti alle curve coniche con date condizioni*, (Napoli, 1841); *Rappresentazione geometrica immediata dell'equazione fondamentale della teoria delle funzioni ellittiche con diverse applicazioni* (Napoli, Rend., 1843); *Studi intorno ad una singolare eliminazione con applicazione alla ricerca della relazione tra gli elementi di due coniche, l'una inscritta e l'altra circoscritta ad un poligono, ed ai corrispondenti teoremi di Poncelet* (Napoli Atti, 1863), e *Sui teoremi di Poncelet relativi ai poligoni iscritti e circoscritti alle coniche* (Giorn. di Mat., 1, 1863).

(5) Pei dati biografici intorno a questo geometra, di cui da poco piangiamo la perdita, rimandiamo il lettore alla *Biographical Notice* di A. R. Forsyth che prelude VIII vol. (1895) di *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*; di più alla *Notizia sulla vita e sulle opere di Arturo Cayley* del Brioschi (Lincei Rend., V, 4, 1895$_{1}$), trad. in francese in Bull. Sc. math., II, 19, 1895, e all'articolo *Arthur Cayley von* M. Nöther (Math. Ann., 46, 1895).

invariante betrekking tusschen twee kegelsneden in en om denzelfden velhoek beschreven (Nieuw Archief voor Wiskunde, 15, 1888) e molto prima il Moutard in un lavoro (1) cui l'originalità dei concetti e l'ampiezza di vedute colloca in una posizione eminentissima fra quelli riferentisi alla teoria che ci occupa.

L'angustia dello spazio ci vieta di dilungarci sui lavori numerosissimi che si proposero il fine modesto di dimostrare con metodi differenti da quelli usati da Poncelet e Jacobi i risultati da questi ottenuti, e su quelli più significanti che hanno per intento lo studio delle proprietà geometriche dei poligoni di Poncelet (2). Vogliamo invece rilevare come il teorema stabilito dal grande geometra francese faccia parte oggi della splendida collezione di *teoremi di chiusura,* alla costituzione della quale contribuì potentemente lo Steiner che ne scoperse nel 1832 uno relativo a cerchi del piano o della sfera (v. *Systematische Entwickelung etc.*) ed uno ancora più notevole relativo ai poligoni d'un numero pari di lati inscritti in una cubica piana (Journ. f. Math., 32, 1846), a dimostrare il quale ultimo s'industriarono molti egregi geometri, fra cui basti ricordare il Clebsch (Journ. f. Math., 63, 1864), Ed. Weyr (Id., 71 e 73, 1870-1871), lo Schoute (Id., 95, 1883), l'Hurwitz (Math. Ann., 19, 1882), il Küpper (Id., 24, 1884), il Disteli (*Die Steiner'schen Schliessungsprobleme nach darstellend-geometrischer Methode,* Leipzig, 1889; cfr. anche Fieder, *Die darstellende Geometrie*, etc., III Th., p. 352 e seg., Leipzig, 1888), Martinetti (Palermo Rend., 5, 1891) e lo Czuber (Journ. f. Math., 114, 1892). Alcune proposizioni analoghe sono dovute all'August (Archiv. der Math. 59, 1876), all'Harnack (1851-1888) (3) (Math. Ann., 12, 1877), al Westphal (Math. Ann., 13, 1878), al Forsyth (Proc. L. M. S. 14), al Juel (Nyt Tidss. for. Math., 1, 1890) e ad altri che per brevità si tacciono.

Giova invece osservare come l'esame della raccolta di lavori riferentesi ai teoremi di chiusura in generale metta in evidenza

---

(1) *Recherches analytiques sur les polygones simultanément inscrits et circonscrits à deux coniques*, in appendice al primo vol. delle *Applications* già citate del Poncelet.

(2) V. in particolare: Halphen, *Application de la théorie des caractéristiques pour les coniques à une question relative aux polygones de Poncelet* (Bull. Soc. phil., VII, 3, 1876).

(3) A. Voss, *Zur Erinnerung an Axel Harnack* (Math. Ann., 32, 1888).

un intimo legame fra questi e la teoria delle funzioni ellittiche. Ora, come è stato acutamente notato (1) che in matematica la comparsa di una contraddizione qualunque annuncia la presenza di una verità nascosta capace di comporre il momentaneo dissidio, così si può dire che un punto di contatto fra dottrine eterogenee deve trovare la propria giustificazione in qualche verità più generale; orbene, pei teoremi di chiusura questa ragione superiore consiste in ciò, che ognuno di essi dà luogo ad una relazione omogenea doppiamente quadratica fra due serie di variabili binarie, cioè ad una relazione della stessa forma di quella che intercede fra due funzioni ellittiche col medesimo argomento; gli è quello che ha dimostrato il Cayley nella memoria *On the Porism of the In-and Circumscribed Polygon and the* (2, 2) *Correspondene of Points on a Conic* (Quart. Journ., 11, 1871) (2). E queste osservazioni ponendo allo scoperto quella parte di ragionamento che interviene in tutte le dimostrazioni dei teoremi di chiusura, diede occasione all'Hurwitz di scrivere una memoria (3) in cui non sappiamo se più ammirare la vastità di vedute o la perfezione della forma, e colla quale poniamo termine a questa digressione, alla quale invano cercheremmo chiusa più degna.

14. Le memorie di Poncelet *Sui centri delle medie armoniche* (Journ. f. Math., 3, 1828) e *Sulla teoria generale delle polari reciproche* (Id. 4, 1829), nonchè la posteriore *Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et des surfaces* (Ib., 8, 1832), ci fanno appressare all'anno 1837, nel quale venne pubblicato l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* di Michele Chasles (1796-1880) (4), opera affascinante in cui l'autore, dopo aver esposto con uno stile la cui bellezza potrà raggiungersi ma non superarsi tutto quanto costituiva ai suoi tempi il patrimonio

---

(1) H. J. Stephen Smith, *On the Present State and Prospects of Some Branches of Pure Mathematics* (Proc. L. M. S., 8, 1876, p. 25).

(2) Cfr. anche i cap. IX-X della seconda parte del citato *Traité* dell'Halphen.

(3) *Ueber unendlich-vieldeutige geometrische Aufgaben insbesondere über die Schliessungsprobleme* (Math. Ann., 15, 1879); v. anche la nota dello stesso geometra *Ueber die Anwendung der elliptischen Functionen auf ein Problem der Geometrie* (Ib., 19, 1881).

(4) Cfr. J. Bertrand, *Éloge de Michel Chasles* in Revue scientifique del 24 marzo 1892.

della geometria pura, gagliardamente sostenne i diritti che questa aveva alla considerazione degli scienziati e che le venivano continuamente contrastati dai ciechi adoratori dell'analisi. Non bisogna però credere che questa sia un'opera di sola polemica, e che quindi abbia, oggi che la lotta è finita, soltanto un valore storico. Infatti dal *Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science,* che fa seguito alla parte storico-critica del lavoro in questione, s'imparano le proprietà generali delle trasformazioni collineari e reciproche sia in generale sia nei casi in cui sono involutorie, mentre nelle trentaquattro note che lo corredano sono consegnate importanti investigazioni storiche e scientifiche; delle prime non occorre far qui esplicita menzione, e riguardo alle altre basterà limitarci a nominare quelle sul rapporto anarmonico, sull'involuzione e sulla legge di continuità, giacchè delle rimanenti, essendo più speciali, è meglio rimandare l'esame a più opportuno momento.

Ma nell'intervallo di tempo interposto fra la comparsa degli scritti di Poncelet e la pubblicazione dell'opera di Chasles, la Germania erasi destata dal torpore in cui l'avevano immersa per mezzo secolo i soporiferi lavori della " Scuola dei combinatori ", torpore dal quale non volle riscuoterla la voce possente di Gauss (1) (1777-1855), il *princeps mathematicorum,* colui che Jacobi non esitò a paragonare ad Archimede, trovando ne' suoi lavori scoperte egualmente profonde che in quelli dell'antico, esposte in forma altrettanto perfetta e con ideale rigore scientifico; colui la cui preminenza mentale si manifesta, come nota il Borchardt, nell'influsso decisivo che ha esercitato sulla matematica del nostro tempo, penetrando in ogni sua ricerca fino all'ultimo midollo, appurando ed ampliando i concetti fondamentali delle matematiche, stringendo in fascio sotto leggi generali fatti che erano rimasti inesplicati o solitari, e congiungendo il rigore dei metodi antichi al libero atteggiarsi dell'analisi moderna.

Il ridestarsi in Germania dello spirito d'indagine è contrassegnato da un nuovo trasferimento dello scettro matematico, il quale si può considerare per avvenuto nel 1826, anno di fon-

---

(1) Cfr.: Sartorius von Walterhausen, *Gauss zum Gedächtniss* (Leipzig, 1856); Schering, *Zur Feier der hundersten Wiederkehr von Gauss' Geburtstag* (Gött. Nachr., 1877; trad. italiana in Ann. di Mat., II, 9, 1878-79).

dazione per opera di A. L. Crelle (1780-1855) d'una pubblicazione periodica a cui Abel (1802-1829) (1); e Jacobi, Steiner e Plücker, Möbius e Staudt assicurarono ben presto una rinomanza non destinata a perire; ed è appunto a questi ultimi quattro scienziati che la geometria è debitrice di essere ritornata in onore all'oriente del Reno: ad essi è pertanto dover nostro di dedicare qualche linea di questo capitolo introduttorio.

15. Il più poderoso dei lavori di Möbius (1790-1868) (2) nel campo della geometria è quello avente per titolo *Der barycentrische Calcul* (Leipzig, 1827) (3); ivi le antiche nozioni sopra i baricentri d'un sistema di punti vengono poste a fondamento di un importantissimo calcolo, il quale conduce ad un nuovo sistema di coordinate, di cui l'autore dimostra l'applicabilità allo studio delle curve piane e sghembe e alla ricerca delle proprietà di nuove trasformazioni geometriche. Ulteriori applicazioni degli stessi metodi sono contenute in memorie che l'autore inserì nei vol. 5 (1830), 24 (1842), 26 (1843) e 37 (1844) del Journ. f. Math., mentre nuove specie di trasformazioni (affinità circolare, involuzione, simmetria, trasformazioni elementari) furono da lui esposte in altri scritti, i cui titoli noi ci dispensiamo dal citare qui per esteso, nulla di più agevole essendo del rintracciarli ora che è compiuta la stampa delle sue *Opere complete*. Altre sue ricerche di genere differente verranno ricordate più avanti; qui facciamo un'eccezione soltanto a favore di quelle sopra i segni delle figure piane e solide (esse fra l'altro condussero alle nozioni di poliedri senza volume e di superficie unilaterali), sui poliedri, sull'*Ausdehnungslehre* di R. Grassmann (1809-1877) e sui quaternioni di W. R. Hamilton (1805-1865), non potendo esse trovare più opportuna menzione nella nostra storia.

Möbius contribuì anche al progresso della meccanica, dell'ottica, dell'astronomia, nonchè dell'analisi, ma questi suoi lavori

---

(1) Bjerkness, *Niels-Henrik Abel. Tableau de sa vie et de son action scientifique* (Paris, 1885).

(2) Cfr. lo schizzo bio-bibliografico premesso dal Baltzer a *August Ferdinand Möbius Gesammelte Werke* (Leipzig, 1885-1887).

(3) Notisi come un lavoro precedente sopra *Zwei geometrische Aufgaben* (inserito in un volume di *Beobachtungen auf der K. Univ.-Sternwarte zu Leipzig*) dimostri che fino dal 1823 il Möbius conosceva e sapeva adoperare maestrevolmente il calcolo baricentrico.

escono dalla cornice del nostro quadro; se li ricordiamo è per rilevare come essi palesino una sostanziale differenza fra lui e l'altra delle stelle di prima grandezza che illuminavano in quell'epoca il cielo della matematica tedesca, cioè J. Steiner (1796-1863) (1), il quale fu così esclusivamente geometra, che coll'analisi non volle mai scendere palesemente a patti (2). Tutti sanno come nella sua *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* (Berlin, 1832) " viene rivelata l'organizzazione in forza della quale i più svariati fenomeni dello spazio sono fra loro connessi ", come ivi siano rigorosamente stabiliti i principî mediante i quali quel grande geometra potè compiere le meravigliose scoperte che partitamente verranno citate nel corso del nostro racconto; qui soltanto vogliamo ricordare, in primo luogo come la possibilità di fondare sopra di essi una completa trattazione delle sezioni coniche emerga dalle *Vorlesungen über synthetische Geometrie* (2ª ed., Leipzig, 1875-1876) che due egregi discepoli di Steiner (il Geiser e lo Schröter) pubblicarono col nome di lui, ed in secondo luogo com'egli abbia in più occasioni dimostrato che il ragionamento puro, indipendente dal calcolo, possa venire adattato anche alla misura od al paragone di aree e volumi, e ne abbia offerto il più memorabile esempio nelle memorie *Sui massimi ed i minimi*, a dimostrare il valore delle quali basti dire che il calcolo delle variazioni non seppe trovare che lungo tempo dopo Steiner e per la via da lui aperta i mezzi di tener dietro alla sintesi nella risoluzione di siffatte questioni (3).

---

(1) Cfr. C. F. Geiser, *In memoria di Jacopo Steiner* (trad. italiana in Ann. di Mat., II, 7, 1875-76).

(2) Come è noto nelle opere di Steiner s'incontrano innumerevoli proposizioni soltanto enunciate; un catalogo completo dei lavori intesi a dimostrarle riuscirebbe estremamente utile ed è pertanto desiderato.

(3) Le memorie originali di Steiner sui massimi e sui minimi vennero pubblicate completamente soltanto dopo la di lui morte fra le sue opere complete; prima ne erano stati pubblicati dei frammenti nel *Journ. f. Math.* ed nel *Journ. de Math.* In tale genere di ricerche Steiner fu seguito dal Lindelöf (*Propriétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume*, Math. Ann., 2, 1870 e Petersb. Bull., 14, 1870; *Quelques problèmes relatifs à l'ellipse et à l'ellipsoïde*, Nouv. Ann., II, 10, 1871), dal Bauer (*Ueber Maximum und Minimum geometrischer Figuren*, Zeitschr. f. Math., 11, 1866), da R. Sturm (*Bemerkungen und Zusätze zu Steiner's Aufsätzen über Maximum und Minimum*, Journ. f. Math., 96, 1884; *Würfel und reguläres Tetraeder als Maximum und Minimum*, Ib. 97, 1884), da Sturm e Lampe (*Ueber das Minimum des Inhaltes eines Vierecks bei gege-*

Meno esclusivista di Steiner fu C. G. v. Staudt (1798-1867) (1), il quale non seppe completamente sottrarsi all'influenza del suo grande maestro Gauss e dedicò una parte della propria attività intellettuale a ricerche sulla teoria dei numeri. Una parte, ma non la più elevata e decisiva, chè questa venne assorbita dalla soluzione del grande problema di trattare la geometria di posizione senza introdurre alcun concetto metrico; la *Geometrie der Lage* (Nürnberg, 1847), ed i *Beiträge,* di cui egli la corredò negli anni 1856, 1857 e 1860, fanno fede del risultato completo che ebbero gli assidui e geniali suoi sforzi per depurare da qualsiasi elemento estraneo quella geometria proiettiva di cui poco dianzi avevano gettate le basi Poncelet e Chasles in Francia, Steiner e Möbius in Germania. Non è in poche parole che si può delineare il contenuto di questi scritti che meritarono a Staudt l'invidiabile epiteto di " Euclide del secolo XIX "; ricorderemo soltanto la nuova definizione di proiettività ivi esposta, la quale non contiene se non quanto è necessario e sufficiente, e quelle di conica e di quadrica, le quali, abbracciando anche curve e superficie immaginarie, possono gareggiare con quelle analitiche e al pari di queste sono suscettibili di essere estese a curve e superficie d'ordine qualsivoglia; aggiungeremo che le ricerche sull'immaginario in geometria valsero a fugare lo " spettro " che aveva perseguitato lo Steiner negli ultimi anni della sua vita, ed a rendere superfluo il " principio di continuità " che aveva fatto pullulare gli oppositori alle dottrine di Poncelet (2). Altri lavori

---

benen Seiten, Ib., id.), da Schwarz (*Beweis des Sätzes, dass die Kugel kleinere Oberfläche besitzt als jeder andere Körper gleichen Volumens*) Götting. Nachr., 1884) e da E. Kötter (*Ueber diejenigen Polyeder die bei gegebenen Gattung und gegebenen Volumen die kleinste Oberfläche besitzen*, Journ. f. Math., 110, 1892).

(1) Cfr. lo studio di C. Segre premesso a *Geometria di posizione di C. G. C. von Staudt, trad. dal tedesco a cura del* Dr. M. Pieri (Torino, 1888).

(2) Fra tutte le investigazioni di Staudt sono queste indubbiamente le più astruse; perciò i risultati di esse si diffusero più difficilmente pel mondo matematico; a facilitarne l'intelligenza s'industriarono in vario modo il Lüroth (Math. Annalen, 8, 1875 e 11, 1877), l'August (Programm der Friedrichs-Realschule, Berlin, 1872), lo Stolz (Math. Ann., 4, 1871); Henri J. Stephen Smith (Ann. di Mat., II, 3, 1869-70), H. Wiener (*Rein geometrische Theorie der Darstellung binären Formen durch Punktgruppen auf den Geraden*, Darmstadt 1885) ed il Segre (Torino Mem., II, 38, 1886, e Journ. f. Math., 100, 1886). Alla teoria degli immaginarii di Staudt si collega la " Rechnung mit Würfen " a cui il Lüroth (Mem. citate), lo Sturm (Math. Ann., 9, 1876) e lo Schröder (Id., 10, 1876) dedicarono delle ricerche speciali.

minori di Staudt contengono delle applicazioni delle dottrine anzidette, e, dimostrando com'egli sapesse debitamente apprezzare e magistralmente trattare le questioni metriche, fanno rimpiangere che non gli sia stato concesso di dare alla *Geometrie der Lage* una sorella colla *Geometrie des Masses* ch'egli aveva progettata (1).

Indirizzo completamente differente dalle indagini di Staudt hanno le pubblicazioni di Giulio Plücker (1801-1868) (2) al quale la geometria analitica è debitrice di decisivi progressi; a lui infatti si deve lo sviluppo delle coordinate omogenee e di quelle poliedriche (3), delle coordinate della retta nel piano (4) e del piano nello spazio (5); a lui, tacendo pel momento della geometria della retta nello spazio di cui tratteremo *ex professo* nel Cap. VII, si devono finalmente svariate ed importantissime applicazioni del " metodo della notazione abbreviata " (6) di cui

---

(1) Gli è ispirandosi ai concetti di Staudt, anzi svolgendoli egregiamente, che il Juel (nella Dissertazione *Bildrag til den imaginaere Linies og den imaginaere Planis Geometri*, Kopenhagen, 1885, e nell'articolo *Ueber einige Grundgebilde der projectiven Geometrie*, Acta, 14, 1889) ed il Segre (nell'interessante gruppo di note sopra *Un nuovo campo di ricerche geometriche*, inserite in Torino Atti, t. 25 e 26, 1890 e 1891) scoprirono delle nuove corrispondenze e delle nuove figure che è necessario considerare per esaurire la geometria proiettiva del piano completo (cioè con punti reali e complessi). Nella stessa direzione procedette lo Sforza scrivendo il *Contributo alla geometria complessa* (Giorn. di Mat., 30, 1892).

(2) Cfr. A. Clebsch, *Zum Gedächtniss an Julius Plücker* (Götting. Abh., 15, 1872). Nota a qnesto proposito giustamente il Beltrami, che " il miglior elogio che si possa fare a Plücker, considerato come geometra, è questo, che Clebsch non ha potuto tessere il racconto dei suoi lavori, senza rifare in gran parte la storia della moderna geometria analitica " (Giorn. di Mat., 11, 1873, p. 153). Oltre a numerose memorie pubblicate in massima parte nel *Journal f. Math.*, a Plücker siamo debitori di cinque grandi opere geometriche; sono: *Analytisch-geometrische Entwickelungen* (Essen, 1828-1831), *System der analytischen Geometrie* (Berlin, 1835; cfr. l'*Anzeige* datane da Plücker stesso in Journ. f. Math., 10, 1833), *Theorie der algebraischen Curven* (Bonn, 1839), *System der Geometrie des Raumes* (Düsseldorf, 1846) e *Neue Geometrie des Raumes* (Leipzig, 1868-1869).

(3) *Ueber ein neues Coordinatensysthem* (Journ. f. Math., 5, 1829).

(4) *Ueber eine neue Art, in den analytischen Geometrie Punkte und Curve durch Gleichungen darzustellen* (Ib., 6, 1829).

(5) *Note sur une théorie générale et nouvelle des surfaces courbes* (Ib., 9, 1831).

(6) *Ueber ein neues Princip der Geometrie und den Gebruch unbestimmter Symbole und Coefficienten* (Ib., 5, 1829); *Analytisch-geometrische Aphorismen* (Ib., 10 e 11, 1831); *Ueber Curven dritter Ordnung und analytische Beweisführung* (Ib., 34, 1847).

egli è uno dei creatori (1), e di quello della " numerazione delle costanti „ che, spesso ma non sempre, egli seppe adoperare a dovere (2). Se noi ci dispensiamo dall' enumerare in questo momento i nuovi risultati di cui la scienza nostra è a lui debitrice, gli è che riteniamo assai più conveniente il farne cenno descrivendo l'evoluzione successiva delle singole teorie che costituiscono la geometria moderna ed alle quali è omai tempo che ci volgiamo, avendo finito lo schizzo del movimento intellettuale che preparò l'epoca attuale. Vedremo così come i grandi di cui ora apprendemmo l'esistenza siano stati seguìti da una numerosa e brillante coorte di discepoli, i quali, spigolando nei campi dissodati dai maestri, mostrarono la fecondità dei semi che questi vi avevano gittati.

(1) Di questo procedimento (immaginato anche dal Bobillier) il Plücker rileva le qualità più pregevoli con le parole seguenti: " Meine Gleichungsformen sind vollständige Darstellungen graphischer Constructionen in den nichts fremdartiges sich findet; es sind ideale mit analytischen Symbolen hingezeichneten Figuren „ (Journ. f. Math., 34, 1847, p. 332).

(2) Niuno ignora quanto sia pericoloso questo artificio del resto fecondissimo (cfr. ad es. la recente memoria pubblicata dal Küpper nei Math. Ann., 22, 1888); il Plücker che ne conosceva e vantava le qualità, ne conosceva pure gli inconvenienti e spesso riuscì ad evitarli nel modo descritto dal Clebsch nella Commemorazione dianzi citata.

CAPITOLO II.

Teoria delle curve piane algebriche.

1. La teoria generale delle curve piane nacque dalla geometria cartesiana. È facile rendersi ragione dell'avere tardato sino a questo momento a sorgere una dottrina di così capitale importanza; infatti, la distinzione delle curve in algebriche e trascendenti, la nozione d'ordine d'una curva algebrica, l'esatta definizione di curva generale nel proprio ordine, sono tutti concetti che l'analisi non incontra alcuna difficoltà a caratterizzare con pieno rigore, mentre la pura geometria degli antichi non vi riusciva, e la pura geometria dei moderni dovette e deve tuttora faticare non poco per gareggiare con la propria sorella.

Che la geometria analitica corazzata con i procedimenti infinitesimali fosse veicolo più di qualunque altro rapido e sicuro per arrivare a conoscere le proprietà comuni a tutte le linee algebriche, è dimostrato dalla facilità (relativa almeno) con cui queste vennero scoperte. Infatti il primo lavoro che si riferisce a questo argomento, l'*Enumeratio linearum tertii ordinis* di Newton, benchè pubblicato nel 1701, sembra stato scritto prima del 1678 (1); ivi sono enunciate tre proposizioni generali importanti assai sulle curve algebriche, le quali sono estensioni di altrettanti teoremi sulle coniche (2). Si dovrebbe, con Chasles, far eco alle parole di Cramer il quale dice essere " da lamentare che Newton siasi contentato di esporre le proprie scoperte senza corredarle delle relative dimostrazioni, e che abbia preferito il piacere di farsi am-

(1) Ball, *A short Account on the History of Mathematics* (Cambridge, 1888) pag. 321.

(2) Il lettore ne troverà gli enunciati in Chasles, *Ap. hist.* (2ª ed., 1875), pp. 144-145. A questo grande geometra siamo debitori di un'elegante applicazione dei teoremi di Newton alla *Construction graphique des tangentes et des rayons de courbure des courbes géométriques* (Bull. de Férussac, 13, 1830), completata più tardi da H. J. Stephen Smith (*On some Geometrical Constructions*, Cambridge Journ., 7, 1852).

mirare a quello di istruire „ (1), ove non si riflettesse essere stato il suo silenzio uno stimolo potente a nuove indagini capaci di sopperirvi, sicchè l'influenza dell'*Enumeratio* fu quale ogni opera può desiderare. A provarlo ricorderemo il lavoro di Stirling (1696 circa-1770) intitolato *Lineae tertii ordinis Newtonianae sive Illustratio tractatus Newtoni de enumeratione linearum tertii ordinis* (Oxoniae, 1717) ed il *Traité des lignes du troisième ordre* (Mém. de l'Acad. pour l'année 1731, Paris, 1733) di Nicole (1683-1758), nei quali, a tacer d'altro, si trova determinato il numero dei punti arbitrarî pei quali si può far passare una curva generale di dato ordine e sono dimostrate delle proposizioni (2) intorno al numero ed alla situazione degli asintoti dalle quali emerge l'identità di comportamento fra essi e le tangenti. Nuove conferme all'influenza esercitata da Newton le troviamo nei tentativi di due suoi discepoli, Cotes (1682-1716) e Maclaurin (1698-1746), di accrescere il numero delle proprietà comuni a tutte le curve algebriche: l'*Harmonia mensurarum* (Cambridge, 1722) del primo e il *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus* (Londra, 1720) (3) del secondo testificano a sufficienza quanto questi tentativi siano stati coronati da buon successo. Di altre proposizioni analoghe siamo debitori a Waring (1736 circa-1798) (4); ma già prima di lui Maclaurin (5) e Braikenridge (6), sviluppando alcune idee schizzate da Newton nell'*Enumeratio* (7), arrivarono ad assegnare per le curve d'ordine superiore delle gene-

---

(1) V. la prefazione (p. VIII) dell'*Introduction* citata più innanzi.

(2) Sono riprodotte nell'*Introduction* di Cramer, pp. 342-351.

(3) Tradotto in francese dal De Jonquières ed inserito in appendice ai *Mélanges de géométrie pure* (Paris, 1856).

(4) *Miscellanea analytica de aequitatibus algebraicis et curvarum proprietibus* (Cambridge, 1762); *Proprietates algebricarum curvarum* (Ib., 1772; Phil. Trans., 1763 e 1764). Nel primo di questi scritti in particolare è osservato (p. 100) essere la classe di una curva di ordine n inferiore a n^2, e altrettanto potersi dire pel numero delle normali uscenti da un punto qualunque.

(5) *Geometria organica sive descriptio linearum curvarum universalis* (London, 1720; cfr. Phil. Trans., 1719, e De Jonquières, *Note sur la géométrie organique de Maclaurin contenant diverses applications des théories de la géométrie moderne*, Journ. de Math., II, 2, 1857).

(6) I dati biografici su questo geometra mancano completamente; lo osserviamo sperando che qualcuno vorrà occuparsi di cercarli. L'opera a cui alludiamo nel testo è l'*Exercitatio geometriae de descriptione linearum curvarum* (1733, cfr. Phil. Trans., 1735).

(7) Cfr. C. Taylor *On Newton's organic Description of Curves* (Cambridge Proc. 3, 1880).

razioni organiche assai notevoli, analoghe a quello che questo grande aveva scoperte per le coniche.

2. I teoremi generali testè nominati sono d'indole metrica; malgrado la tendenza verso il campo proiettivo che in questo secolo domina la geometria, i matematici vollero e seppero aggiungere a quelle proposizioni delle nuove analoghe non prive d'importanza e valore. Citeremo fra queste anzitutto il seguente: " il centro delle medie distanze dei punti di contatto delle tangenti d'una curva algebrica aventi una stessa direzione, non muta al variare di questa ", che Chasles fece conoscere nei due *Mémoires sur la transformation des figures* inseriti nella *Correspondance mathématique* (5 e 6, 1829 e 1830). Va poi ricordato il *Mémoire sur la théorie des diamètres rectilignes des courbes quelconques* (Journ. f. Math., 14, 1849) di P. L. Wantzel (1814-1848), la grande memoria di Steiner *Ueber solche algebraische Curven welche einen Mittelpunkt haben* ecc. (Journ. f. Math., 47, 1854), le note di Chasles intitolate *Propriétés des diamètres des courbes géométriques* (C. R., 72, 1871), *Propriétés générales des courbes géométriques relatives à leurs axes harmoniques* e *Théorèmes relatifs aux axes harmoniques des courbes géométriques* (C. R., 73, 1871) (1), ed il recente scritto di E. Ciani *Le linee diametrali delle curve algebriche piane e in particolare i loro assi di simmetria* (Pisa Ann., 6, 1889). Al primo dei citati scritti di Chasles si collega il notevole scritto di J. Liouville (1807-1882) *Sur quelques propositions générales de géométrie et sur la théorie de l'élimination dans les équations algébriques* (Journ. de Math., 6, 1841; cfr. Fouret *Démonstration et application d'un théorème de Liouville sur l'élimination*, Nouv. Ann., III, 9, 1890), la continuazione di esso intitolata *Développements sur un théorème de géométrie* (Journ. de Math., 9, 1844), ed i complementi che esso ricevette per opera del Duhamel e di O. Terquem (1782-1862), e che quest'ultimo espose nell'articolo *Démonstration du théorème de M. Chasles sur les tangentes parallèles et les plans tangents parallèles* (Nouv. Ann., 4, 1845). Invece alcune delle proposizioni che

---

(1) Altre proposizioni congeneri del medesimo autore verranno citate nel n. 9 del cap. IX.

sono enunciate nella memoria di Steiner furono dimostrate (dopo d'averle sottoposte ad una trasformazione proiettiva) dal Güssfeldt nel lavoro *Ueber Curven, welche einen harmonischen Pol und eine harmonische Gerade besitzen, und darauf bezügliche Eigenschaften allgemeiner algebraischer Curven, mit besonderer Berücksichtigung der Curven dritter Ordnung* (Math. Ann., 2, 1870) e dal Bobek nella nota *Ueber die Steinerschen Mittelpunktscurven* (Wiener Ber., 98, 1889). Nè vanno dimenticati l'altro scritto di Steiner *Von dem Krümmungs-Schwerpunkt ebener Curven* (Journ. f. Math., 21, 1840; cfr. C. Neumann *Sul baricentro di curvatura delle curve algebriche,* Ann. di Mat., II, 1, 1868), l'*Indication de quelques théorèmes de géométrie* (C. R., 20, 1845) e la *Note sur les centres des lignes et des surfaces algébriques* (Journ. de Math., 11, 1846) del Bréton (de Champ), la nota *Di alcune proprietà generali delle curve algebriche* (Giorn. di Mat., 4, 1866) del Beltrami, nonchè le memorie del Minding *Sur la somme des carrés de toutes les droites qui à partir d'un point donné coupent sous un angle donné une courbe algébrique* (Journ. f. Math., 11, 1834), di G. Fouret *Sur quelques propriétés relatives aux points d'incidence des droites issues d'un même point et rencontrant une courbe algébrique sous un même angle* (Palermo Rend., 5, 1891) e del Birkeland *Ein Satz über algebraische Curven* (Monatshefte, 1, 1890); nè si possono passare sotto silenzio il *Mémoire sur les polaires inclinées* (Nouv. Ann., 18 e 19, 1859 e 1860) del Dewulf e le geniali ricerche dell'Hurwitz *Ueber Tangentenconstructionen* (Math. Ann., 22, 1883), aventi lo scopo di generalizzare l'*Einfache Construction der Tangenten an die allgemeine Lemniscate* inventata da Steiner (Journ. f. Math., 14, 1835).

Malgrado il valore di questi scritti, si può ritenere che la chiave per impadronirsi delle più interessanti e riposte proprietà metriche delle curve sia stata somministrata ai geometri da Plücker colla generalizzazione che egli — inspirandosi senza dubbio a Poncelet — propose per l'antica nozione di fuoco d'una conica nella celebre memoria *Ueber solche Punkte, die bei Curven einen höheren Ordnung als der zweiten den Brennpunkten der Kegelschnitte entsprechen* (Journ. f. Math., 10, 1833; cfr. Siebeck *Ueber eine neue Behandlungsweise der Brennpunkte,* Ib., 64, 1865). Chi voglia convincersi della verità di quest'asserzione non ha che da consultare le memorie che da essa derivano

e di cui le seguenti sono forse le più importanti (1): Laguerre, *Théorèmes généraux sur les courbes planes algébriques* (C. R., 60, 1865), *Sur quelques propriétés des courbes algébriques* (Id., 70, 1875) e *Sur les polaires d'une droite relativement aux courbes et aux surfaces algébriques* (Bull. S. M. F., 3, 1875); Clifford, *On the Theory of Distances* (Brit. Ass. 1869; cfr. Mathematical Papers, London, 1882, p. 147-151 e 612); E. Holst, *Ein Paar allgemeine metrische Sätz für algebraische Curven* (Math. Ann., 11, 1877) e *Ein Paar synthetisches Methoden in der metrischen Geometrie mit Anwendungen* (Lie Arch., 7, 1882); C. Stéphanos, *Sur certaines directions de transversales des courbes algébriques qui correspondent aux directions des axes de coniques* (Bull. S. M. F., 9, 1881); Pieri, *Sopra alcuni problemi riguardanti i fasci di curve e di superficie algebriche* (Giorn. di Mat., 24, 1886); Humbert, *Sur quelques propriétés métriques des courbes* (Nouv. Ann., III, 6, 1887); Fouret, *Sur quelques propriétés involutives des courbes algébriques* (Palermo Rend., 3, 1889); Amigues, *Théorème sur les foyers d'une courbe quelconque* (Nouv. Ann., III, 11, 1892); P. H. Schoute, *Sur une relation générale dans la théorie des courbes planes* (Acad. d'Amsterdam, Verslagen, 1892-93); Gob, *Extension et application du théorème de Newton* (Belgique Bull., III, 28, 1894).

3. Mentre le verità ricordate nel n. 1 furono in massima parte scoperte coll'aiuto delle coordinate cartesiane, all'analisi infinitesimale siamo debitori della conoscenza della esistenza e delle proprietà di punti speciali sulle curve. Tacendo dei *flessi*, che vennero studiati per la prima volta metodicamente nell'appendice alla seconda edizione (1668) del *Mesolabium* di R. F. De Sluse (1622-1685), il quale considerò anche le curve che tagliano una data nei propri punti d'inflessione, ricorderemo che nel carteggio di Giovanni Bernoulli (1667-1748) con Leibniz (*Leibnizisens Math. Schriften,* ed. Gerhardt, 3, p. 185) del luglio 1695 è discorso delle *cuspidi* la cui presenza è segnalata nella parabola semicubica. Che un punto di tal natura sia caso speciale

(1) Chiediamo venia al lettore per questo ed altri aridi elenchi di lavori, e confidiamo che il perdono non ci verrà negato da chi rifletta essere l'opera presente, piuttosto che una *guida*, un *orario ferroviario* in cui pertanto il lettore troverà meno descrizioni che enumerazioni di paesi; possa esser dessa di giovamento a chi sta per tracciare il proprio itinerario scientifico!

di un punto doppio avvertì più tardi il Saurin (1659-1737) nella memoria intitolata *Remarques sur un cas singulier du problème des tangentes* (Paris, 1723); che oltre alle cuspidi dell'anzidetta specie altre ne esistano, osservò il marchese de l'Hôpital (1661-1704) nella sua ben nota *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (Parigi, 1696) (1); e la nuova singolarità apparve ad Eulero abbastanza importante per dedicarvi un lavoro speciale (2). Nè sfuggì l'esistenza di punti in cui la tangente ha colla curva un contatto ancor più intimo d'una tangente d'inflessione; infatti il Maupertuis (1698-1759) nella memoria *Sur quelques affections des courbes* (Mém. de Paris, 1729) considerò il caso del contatto di terzo ordine, mentre del caso generale trattò più tardi il Cramer nella grande opera che esamineremo fra breve. Aggiungiamo che ad uno dei più abili commentatori di Cartesio, cioè l'abate de Gua de Malves (1714-1785), siamo debitori (3) dei criterî analitici per riconoscere i punti multipli delle curve piane e quindi di un metodo per assegnarne le coordinate.

4. I lavori citati nei nn. 1 e 3 portarono ad un numero considerevole le cognizioni intorno alle curve piane in generale, sicchè verso la metà del secolo XVIII a due eminenti geometri parve giunto l'istante di raccoglierle coordinandole: alludiamo a Leonardo Eulero e Gabriele Cramer (1704-1752), al secondo volume dell'*Introductio in analysin infinitorum* (Lausannae, 1748) di quello, all'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genève, 1750) di questo, opere che per ineluttabile necessità dovevano avere ed effettivamente presentano molti punti di contatto. Alcune delle investigazioni ivi esposte (per esempio

(1) Cfr. Eneström *Sur la part de Jean Bernoulli dans la publication de l' " Analyse des infiniment petits "* (Bibl. math., 1894).

(2) *Sur le point de rebroussement de la seconde espèce de M. le marquis de l'Hôpital* (Mém. de Berlin, 5, 1749); vedi anche Cayley, *On the Cusp of the second Kind or Nodecusp* (Quart. Journ., 6, 1964).

(3) *Usage de l'analyse des Descartes pour découvrir, sans le secours du calcul différentiel, les propriétés des lignes géométriques de tous les ordres* (Paris, 1740). Che quest'opera, malgrado i suoi pregi, non sia esente da gravi imperfezioni è detto senza reticenze da Cramer nella prefazione all'*Introduction* già menzionata.

quelle su i diametri, gli asintoti (1) ed i centri (quando esistono)) perdettero buona parte del loro valore dopo che si apprese a considerare le proprietà metriche come casi particolari delle proiettive (v. Cap. X); ma altre meritano un posto eminente essendo state il punto di partenza di ulteriori ricerche importanti. Rileveremo anzitutto l'uso della rappresentazione parametrica delle coordinate dei punti d'una curva (Cramer, p. 33; cfr. *Introductio,* 1, p. 39-46), poi le osservazioni di Cramer (l. c., p. 78-79) e di Eulero (*Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes,* Mém. de Berlin, 4, 1748) intorno alla possibilità di far passare una curva d'ordine n per più di $\frac{n(n+3)}{2}$ punti, osservazioni importantissime, che diedero origine al così detto " paradosso di Cramer ", proposizione che molti scienziati si sforzarono di depurare da ogni traccia d'eccezionalità. Ricorderemo anche il teorema " se degli $\frac{n(n+3)}{2}$ punti per cui deve passare una curva d'ordine n, più di mn si trovano su una curva dell'ordine $m < n$, la curva d'ordine n è composta " (Cramer, l. c., p. 78), il quale può riguardarsi come la prima pietra di quel grandioso monumento costruito con una folla di bei teoremi di Gergonne (2), di Plücker (3), di Jacobi (1804-1851) (4), di Cayley (5) ed in cima al quale si trova l'interpretazione geometrica del celebre teorema di Abel (6).

---

(1) Notiamo a questo proposito con S. Günther (*Albrecht Dürer, einer der Begründer der neueren Curventheorie*, Bibl. math., 1886) che la nozione di asintoto curvilineo si può far risalire ad Alberto Dürer (1471-1528) che vi allude nel 1525.

(2) *Sur quelques lois qui régissent les lignes et les surfaces algébriques* (Ann. de Math., 17, 1826-27).

(3) *Recherches sur les courbes algébriques de tous les degrés* (Ivi, 19, 1828-1829), *Théorèmes généraux concernant les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'inconnues* (Journ. f. Math. 16, 1837; alcune inesattezze che vi si trovano furono segnalate da A. Schönfliess a p. 608 di *Julius Plückers Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen*, 1, Leipzig 1895).

(4) *De relation. quae locum habere debent inter puncta intersectionis*, ecc. (Journ. f. Math., 15, 1836). Cfr. Lejeune-Dirichlet, *Gedächtnissrede auf C. G. J. Jacobi* (Berl. Abh., 1852).

(5) *On the Intersections of Curves* (Cambridge Journ., 3, 1845), *On the Theory of Algebraic Curves* (Ivi, 4, 1843), *On the Theory of Involution in Geometry* (Cambridge Journ. 2, 1847) e *On the Intersection of Curves* (Math. Ann., 30, 1887); quest'ultima nota in risposta alle osservazioni contenute nell'articolo del Bacharach *Ueber den Cayley'sche Schnittpunctsatz,* Ib., 26, 1886). Si veda anche l'interessante articolo dello Zeuthen *Sur la détermination d'une courbe algébrique par des points donnés* (Ib., 31, 1888).

(6) Nei tre articoli del Woepcke intitolati: *Nouveaux théorèmes relatifs aux intersections de certains systèmes de courbes ou de surfaces* (Journ. de Math.,

E giacchè l'ordine cronologico ci costrinse a considerare simultaneamente le due opere congeneri di Cramer e di Eulero, non possiamo esimerci dal paragonarle fra loro e constatare come la prima sia discutibilmente superiore alla seconda: donde anche la ragione per cui essa trova oggi assai più lettori di questa. Anche tacendo del fatto che nell'*Introduction* si trova determinato il numero delle intersezioni di due curve piane algebriche qualisivogliano, perchè la stessa questione venne da Eulero trattata nella memoria intitolata *Démonstration sur le nombre des points où deux lignes d'un ordre quelconque peuvent se couper* (Mém. de Berlin, 4, 1748), importa per converso ricordare l'esame minuzioso (p. 562-568) di tutte le complicazioni che possono presentare i punti multipli d'una curva d'ordine < 7, e le osservazioni (p. 455-59) intorno al numero ed alla molteplicità dei punti singolari che può avere una curva di dato ordine: e queste fanno riscontro ad un errore grave commesso da Eulero (op. cit., n. 300, p. 164), del quale vi è tanta maggior ragione di meravigliarsi in quanto che sembra dovesse l'enumerazione da lui fatta (p. 31-32) delle curve degeneri d'un dato ordine impedirgli di commetterlo.

5. Altri risultati particolari conseguiti da Eulero e Cramer per l'esiguità di spazio debbono venir qui passati sotto silenzio. Ma altrettanto non è permesso di fare riguardo ad un progresso assai notevole di cui la teoria delle curve piane (anzi, più generalmente, quella dei luoghi rappresentati ciascuno da un'equazione fra le coordinate d'un punto) è debitrice ad uno studente della Scuola delle miniere di Parigi, Gabriele Lamé (1795-1870) (1), il quale inaugurò la propria carriera di scienziato coll'*Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie* (Paris, 1818), ov'è dimostrata, mediante molteplici applicazioni, la fecondità della osservazione (designata oggi col nome di " principio di Lamé ") che l'equazione $\lambda U + \mu V + ... = 0$

20, 1855); *Propriétés générales des courbes algébriques et théorèmes sur les coniques homothétiques* (Journ. f. Math., 53, 1856) e *Propriétés d'un systhème de courbes algébriques ayant en commun un certain nombre de points* (Id., 54, 1857), sono esposte alcune ovvie conseguenze di teoremi noti sui punti d'intersezione di curve.

(1) J. Bertrand, *Eloges académiques* (Paris, 1890).

rappresenta la totalità dei luoghi passanti pei punti comuni ai luoghi U = o, V = o, ...

Una vera trasformazione radicale subì la teoria che ci occupa per merito di Plücker. Infatti nel *System der analytischen Geometrie* (1835) (1) è per la prima volta considerata metodicamente una curva piana ad un tempo come luogo di punti e come inviluppo di rette ed è mostrato come sia conveniente questo doppio modo di studiare una medesima figura, inoltre è ivi ampliato il concetto di coordinate sì da abbracciare anche coordinate omogenee e poligonali (2), sì da includere anche le rette. L'importanza di queste innovazioni è visibile già nell'opera ora citata, ma si manifesta in modo ancora meno discutibile nella posteriore *Theorie der algebraischen Curven* (1839), nella cui introduzione si ritrovano quei teoremi sulle intersezioni di curve citati nel n. prec. e delle cui due parti dobbiamo ora dire qualche parola. La prima tratta un tema oggi fuor di moda, la teoria degli asintoti; se si paragona il modo in cui lo considera Plücker con le trattazioni anteriori, si ravviserà senza stento come questi abbia ampliata ed approfondita tale teoria col considerare, non solo gli asintoti curvilinei, ma ancora quelli che hanno colla curva un contatto d'ordine superiore e sia per tal modo riuscito a correggere degli errori concernenti le curve piane di quart'ordine che Eulero aveva divulgati con la sua *Introductio* (3). Nella seconda parte della *Theorie* trattò a fondo delle proprietà

(1) In questo anno medesimo apparvero altre due opere sulla teoria che stiamo trattando; una postuma di K. C. F. Krause (1781-1832) (*Novae theoriae linearum curvarum originariae et verae scientificae specimina quinque prima;* edidit H. Schröder, Monachii), l'altra di A. Peters (1803-?) (*Neue Curvenlehre*, Dresden); entrambe si proposero di sostituire alla geometria cartesiana un metodo meno artificioso (tale intento è dichiarato nel proemio della seconda di queste opere che sola io potei esaminare); lo scopo non è sragionevole certamente, ma il tentativo è fallito; ed è il caso di tenerne conto soltanto come di un avviamento allo studio delle curve e superficie con *elementi intrinseci*, indipendenti cioè da uno speciale sistema di coordinate, benchè chi più tardi immaginò tali importantissime rappresentazioni non abbia tratto certamente la propria ispirazione dai due scritti or citati, nè gli autori di questi siansi avveduti della portata delle loro idee.

(2) Cfr. la chiusa del Cap. I. Idee analoghe s'incontrano in Bobillier (1797-1832) (*Essai d'un nouveau mode de recherche des propriétés de l'étendue*, Ann. de Math., 18, 1827-28).

(3) Queste investigazioni di Plücker vennero recentemente riprese e condotte a perfezione dallo Stolz nella memoria *Allgemeine Theorie der Asymptoten der algebraischen Curven* (Math. Ann., 11, 1877).

dei punti singolari delle curve piane, di cui egli si può considerare per il vero creatore (1); ivi infatti egli, non soltanto ha insegnato a distinguere chiaramente le singolarità dei luoghi dalle singolarità degl'inviluppi ed a caratterizzare senza ambiguità le singolarità ordinarie degli uni e degli altri, ma ha stabilite le relazioni che intercedono fra le sei caratteristiche di una curva piana esente da singolarità eccezionali (2). Sono queste le celebri " formole di Plücker ", mediante le quali venne definitivamente sciolto il così detto " paradosso di Poncelet ", cioè quell'apparente contraddizione (3) che s' incontra se si applica senza riguardo ai punti singolari la formola che dà il numero delle tangenti d'una curva algebrica uscenti da un punto e poi, servendosi della formola correlativa, si vuol ritrovare l'ordine della curva data (4). Le sei caratteristiche con cui Plücker definì una curva piana con sole singolarità ordinarie sono a due a due correlative; ora si presenta il fatto notevole che, tranne per quattro curve speciali, l'uguaglianza di due caratteristiche fra loro correlative, trae seco che la curva sia correlativa a sè stessa, cioè che anche le caratteristiche correlative delle altre due coppie siano fra loro identiche (5).

6. Alle formole di Plücker sono collegate parecchie questioni, di cui due si presentano spontaneamente.

La prima riguarda la loro invertibilità, vale a dire il problema:

---

(1) Per convincersene si confrontino colla trattazione del Plücker quelle del Lacroix, nel 3° vol. del suo grande *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (1797-1800), e del Poisson, nella nota *Sur les points singuliers des courbes* (Journ. Éc. pol., 14° cah., 1808).

(2) Cfr. anche la chiusa al *Systh. der an. Geom.* e gli articoli: *Solution d'une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes* (Journ. f. Math., 12, 1834) e *Note sur les points singuliers des courbes* (Journ. de Math., 2, 1837).

(3) Cfr. Poncelet, *Solutions de problèmes de géométrie, suivies d'une théorie des polaires réciproques et de réflexions sur l'élimination* (Ann. de Math., 8, 1818, oppure *Applications d'analyse et de géométrie*, 2, Paris, 1864).

(4) Fra le dimostrazioni più recenti delle formule di Plücker ricorderemo quella che si legge nell'articolo del Beck, *Eine elementare Herleitung der Plücker'schen Formeln* (Wolf Zeitschr., 30, 1889) e quella che, con una lieve aggiunta che ho indicato altrove (Bull. Sc. math., II, 17_{I}, 1893), si desume da una osservazione del Bischoff (*Extrait de deux lettres à M. Cremona*, Ann. di Mat., II, 6, 1873-75).

(5) Plücker, a pag. 212 della citata *Theorie;* e più completamente Bioche, *Sur les singularités des courbes algébriques planes* (Bull. S. M. F., 20, 1892).

“ a sei numeri arbitrarî che le soddisfino corrisponda sempre una curva piana?„; ora che tutti questi numeri non si possano scegliere sempre completamente ad arbitrio, risulta dal non potere il numero delle cuspidi oltrepassare un certo limite (1), ma il trovare delle limitazioni analoghe per gli altri cinque numeri, se pure ci sono, ed il dimostrare che, quando siano soddisfatte da sei numeri, esiste una curva che ha questi per caratteristiche, sono problemi importanti la cui soluzione è riserbata all'avvenire.

La seconda questione invece si riferisce all' estensione delle formole di Plücker a curve piane dotate di singolarità qualunque e può oggi considerarsi per risoluta; e noi non possiamo far meglio che rimandare il lettore alla VI sezione dell'importante scritto di Brill e Nöther intitolato *Die Entwichelung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit* (Deutsch. Math.-Ver., 3, 1892-93) ove sono luminosamente esposti i più cospicui risultati consegnati nei lavori a cui si deve la fondazione e lo sviluppo di tale teoria e dei quali, per mancanza di spazio, noi siamo forzati a ricordare qui i soli titoli: Cayley, *Note sur les singularités supérieures des courbes planes* (Journ. f. Math., 64, 1865), *On the Higher Singularities of a Plane Curve* (Quart. Journ., 7, 1866), *Nouvelles recherches sur l'élimination et la théorie des courbes* (Journ. f. Math., 63, 1864) e *Suite des recherches sur l'élimination et la théorie des courbes* (Ib., 64, 1865); Nöther, *Ueber die algebraischen Functionen,* II Nota (Götting. Nachr., 1871), *Ueber die singulären Werthsysteme einer alg. Function und die singulären Punkte einer algebraische Curve* (Math. Ann., 9, 1875), *Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der alg. Functionen* (Ib., 23, 1883), *Zum Fundamentalsatz aus der Theorie der alg. Functionen* (Ib., 34, 1889), e *Les combinaisons caractéristiques dans la transformation d'un point singulier* (Palermo Rend., 4, 1890); Stolz, *Ueber die*

(1) Lo dimostrò F. Padula (1815-1881) nel notevole scritto che tratta *De' punti multipli delle curve algebriche* (Tortolini Ann., 3, 1832), scritto ricco di altri risultati originali. Pel caso di curve razionali il limite corrispondente fu trovato da Clebsch nella sua celebre memoria sulle curve di genere 0, di cui parleremo nel n. 13 (cfr.: anche *Vorlesungen über Geometrie,* I Bd., Leipzig, 1876, p. 352); di più: Malet, *On a Limit to the Number of Cusps belonging to a Plane Curve of any Order* (Hermathen, 1880) e Pellet, *Sur le nombre des points multiples d'une courbe algébrique et les courbes unicursales* (Nouv. Ann., II, 20, 1881).

singulären Punkte der algebraischen Functionen und Curven (Math. Ann., 8, 1874) e *Die Multiplicität der Schnittpunkte zweier algebraischen Curven* (Ib., 15, 1879); De la Gournerie (1814-1883) (1), *Note sur les singularités élevées des courbes planes* (Journ. de Math., II, 14 e 15, 1869-70) e *Note sur le nombre des points d'intersection qui représente un point multiple commun à deux courbes planes* (C. R., 77, 1873); Painvin, *Sur l'abaissement de la classe d'une courbe produit par la présence d'un point de rebroussement* (Bull. Sc. math., 4, 1873), e *Note sur l'intersection de deux courbes* (Ib., 5, 1874); Halphen, *Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre* (Bull. S. M. F., 1, 1873), *Sur les points singuliers de courbes algébriques planes* (Mém. prés., 26, 1877), *Sur une question d'élimination ou sur l'intersection de deux courbes en un point singulier* (Bull. S. M. F., 3, 1875), e *Étude sur les points singuliers* (Paris, 1884); H. J. Stephen Smith (1826-1883) (2), *On the Higher Singularities of Plane Curve* (Proc. L. M. S., 6, 1876); Zeuthen, *Note sur les singularités des courbes planes* (Math. Ann., 10, 1876), e *Sur un groupe de théorèmes et formules de la géométrie énumérative* (Acta 1, 1883). A. Brill, *Ueber Singularitäten ebener algebraischen Curven und eine neue Curvenspecies* (Math. Ann., 16, 1879), *Ueber die Multiplicität der Schnittpunkte von zwei ebenen Curven* (Münchener Ber., 1888), *Ueber das Verhalten einer Function von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle* (Ib., 1891) e *Ueber die Auflösung höherer Singularitäten einer algebraischen Curve in elementare* (Katalog der math. Ausstell., München, 1892); Kronecker (1823-1891) (3) *Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabel* (Journ. f. Math., 91, 1881); Guccia, *Sur une question concernant les points singuliers des courbes algébriques planes* (C. R., 103, 1886) e *Sulle singolarità composte delle curve algebriche piane* (Palermo Rend., 3, 1889); Cosserat, *Sur l'étude d'une courbe algébrique dans le voisinage d'un de ses points* (Toulouse Ann., 4, 1890); Bertini, *Sopra alcuni teoremi fondamentali delle curve algebriche piane* (Rend. Ist. Lomb., II, 21, 1888), *Sul numero dei*

---

(1) J. Bertrand, *Éloges académiques* (Paris 1890).
(2) Cfr. i preliminari dell'opera *The collected Mathematical Papers of Henry John Stephen Smith edited by J. W. L. Glaisher* (Oxford, 1874).
(3) Cfr. H. Weber *Leopold Kronecker* (Math. Ann., 43, 1893).

punti di diramazione di una singolarità qualunque di una curva piana algebrica (Ib., 23, 1890), *Zum Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Functionen* (Math. Ann., 34, 1889), *Sopra un teorema del sig. Netto* (Ib., 35, 1890), *Rappresentazione di una forma ternaria per combinazione lineare di due altre* (Rend. Ist. Lomb., II, 24, 1891) e *Trasformazione di una curva algebrica in un'altra con soli punti doppii* (Riv. di Mat., 1, 1891, oppure Math. Ann., 44, 1894); Pieri, articolo dallo stesso titolo (Riv. di Mat., 4, 1894) (1); Miss C. A. Scott, *On the higher Singularities of Plane Curves* (Am. Journ., 14, 1892 e 15, 1893), A. Voss, *Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der alg. Functionen* (Math. Ann., 27, 1886); H. F. Baker, *Examples of the Applications of Newton's Polygon to the Theory of Singular Points of Algebraic Functions* (Cambridge Trans., 15, 1894; cfr. Math. Ann., 45, 1894) (2).

Riguardo a queste ricerche ci limiteremo ad osservare che esse rivelarono la possibilità di applicare le formole di Plücker a curve comunque specializzate, mostrando come ogni singolarità superiore equivalesse (almeno per ciò che concerne quelle formole) a un certo numero di punti doppî e di cuspidi, di tangenti doppie e di flessi; esse inoltre obbligarono a determinare esattamente quante intersezioni di due curve sono assorbite da un punto comune singolare per entrambe, nonchè le condizioni di rappresentabilità di una forma ternaria con una combinazione lineare di due altre.

7. Il largo uso fatto da Plücker del principio di dualità non sembra fosse ritenuto sufficientemente legittimo dai di lui contemporanei; lo prova il fatto che un suo eminente compatriota credette opportuno, fors'anche necessario, di confermare con un calcolo diretto l'esistenza di $\frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9)$ tangenti doppie

(1) Allo stesso teorema si riferisce la nota del Simart, *Sur un théorème relatif à la transformation des courbes algébriques* (C. R., 116, 1893).

(2) Se fra i lavori citati non si trova l'*Étude de la courbure en un point multiple d'une courbe plane* del Painvin (Ann. di Mat., II, 4, 1870-71), è perchè questo tratta una questione metrica. Per converso ad essi vanno uniti due importanti lavori dello Zeuthen, che trattano problemi affini a quelli ora considerati; cioè la *Détermination des nombres plückeriens des enveloppes* (C. R., 78, 1874) — ove, fra l'altro, si trova la nozione di " genere d'un sistema di curve piane " — e la memoria *Sur un groupe de théorèmes et de formules de la géométrie énumérative* (Acta 1, 1882-83).

e $3n(n-2)$ flessi in una curva generale d'ordine n; noi, benchè non possiamo dividere quei dubbî, dobbiamo essere riconoscenti a quegli scrupoli, perchè ad essi siamo debitori di una memoria di Jacobi estremamente notevole (1), ove è insegnato a trovare mediante il calcolo i punti di contatto delle tangenti doppie ed i punti d'inflessione di una curva qualunque.

Nelle indagini di tal fatta Jacobi venne seguìto dal suo celebre discepolo Otto Hesse (1811-1874) (2), il valente geometra che seppe per primo metodicamente applicare i risultati della teoria delle equazioni algebriche alla ricerca delle proprietà delle curve e superficie di ordine qualsivoglia (3). In analoga direzione procedette Hesse medesimo nella memoria *Ueber die Wendepunkte der algebraischen ebenen Curven und die Schmiegungsebenen der Curven von doppelter Krümmung welche durch den Schnitt zweier algebraischen Oberflächen entstehen* (Journ. f. Math., 41, 1851), il Salmon nell'articolo *On the Double Tangents to Plane Curves* (Phil. Mag., ottobre 1858) ed il Cayley nella nota *On the Double Tangents of a Plane Curve* (Phil. Trans., 149, 1859), il quale ultimo allargò ancora ed approfondì tale campo di indagini nelle grandi memorie *On the Conic of five-pointic Contact at any point of a Plane Curve* (Phil. Trans., 149, 1859) e *On the sextactic Points of a Plane Curve* (Ib., 155, 1865 (4); cfr. Spottiswoode, *On the sextactic Points of a Plane Curve,* Ivi); e la ben nota scrittura

---

(1) *Beweis des Satzes, dass eine Curve* n^{ten} *Ordnung im Allgemeinen* $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ *Doppeltangenten hat* (Journ. f. Math., 40, 1850).

(2) Si veggano le memorie sulle curve di quarto ordine che saranno citate nel n. 12 del presente capitolo; inoltre *Auszug dreier Schreiben von Herrn Prof. Hesse und eines Schreibens an Herrn Prof. Hesse* (Journ. f. Math., 40, 1850).

(3) Cfr. G. Bauer, *Gedächtnissrede an Otto Hesse* (München, 1882).

(4) Riguardo a quest'ultima osserveremo in primo luogo, come il Battaglini opinasse che il numero, trovato da Cayley, pei punti (sestastici) in cui una curva generale ha con una conica un contatto di 5° ordine, potesse determinarsi colla ben nota “ teoria dei reciprocanti „ di Sylvester (cfr. Am. Journ., 8, 1886); ma delle ricerche istituite in proposito soltanto un frammento ha visto la luce (v. la nota *Sui punti sestatici di una curva qualunque,* Lincei Rend., IV, 4_2); ed in secondo luogo che le modificazioni subìte da quel numero per l'intervento di singolarità della curva vennero determinate dall'Halphen nella memoria *Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du troisième degré* (Bull. S. M. F., 4, 1876) e verificate poi dal Gerbaldi nella nota *Sui punti sestatici delle curve algebriche piane* (Palermo Rend., 4, 1890).

di A. R. F. Clebsch (1833-1872) (1) *Ueber eine Classe von Eliminationsproblemen und über einige Punkte der Theorie der Polaren* (Journ. f. Math., 58, 1861) si accosta a queste perchè mostra delle nuove eleganti applicazioni dell'algebra moderna alla geometria; lo stesso dicasi riguardò alla nota del Pasch *Ueber eine Eigenschaft der reciproken Curven* (Ib., 74, 1872).

Delle questioni su cui testè c'intrattenemmo e di tutte le altre attinenti alla teoria analitica delle curve piane, è agevole prendere oggi esatta cognizione grazie ad uno dei pregevolissimi trattati che fecero di Giorgio Salmon uno dei più efficaci cooperatori alla diffusione dei recenti metòdi algebrici e geometrici (2). In particolare si apprende da esso almeno il primo stadio dell'applicazione alla geometria della teoria delle funzioni dotate di carattere invariantivo, la quale fin d'allora si palesò come il metodo naturale per esprimere e studiare le relazioni fra curve che non si perdono per trasformazioni omografiche, in particolare per trattare le curve covarianti che portano il nome di Steiner, di Hesse, di Cayley (3) e di altri (4). Quella teoria si dimostrò poi ancora più ubertosa di risultati geometrici quando venne svolta coll'uso metodico della notazione simbolica: lo pose in luce forse per primo il Clebsch — al quale, com'è noto, l'algebra moderna deve moltissimo — valendosene per esporre il metodo di Jacobi per determinare le tangenti doppie nell'articolo modestamente intitolato *Bemerkung zu Jacobi's Beweis für die Anzahl der Doppeltangenten* (Journ. f. Math., 63, 1864; cfr. Dersch, *Doppeltangenten einer Curven* n[ter] *Ordnung,* Math. Ann., 7, 1874), lo dimostrò più largamente,

---

(1) Cfr.: *Zum Andenken an Rudolf Friedrich Alfred Clebsch* (Math. Ann. 6, 1873); *Rudolf Friedrich Alfred Clebsch. Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen, von einigen seiner Freunden* (Ib., 7, 1874).

(2) Alludo qui al *Treatise on Higher Plane Curves*, pubblicato per la prima volta nel 1852, ristampato in seguito molte volte e tradotto nelle principali lingue.

(3) Delle Hessiane, Steineriane e Cayleyane successive si occupò il Maisano in una breve nota intitolata *Ricerche intorno a certe curve covarianti analoghe alle curve Hessiane, Steineriane e Cayleyane di una curva fondamentale d'ordine* n (Palermo Rend., 1, 1887).

(4) Le singolarità di queste curve vennero studiate di recente con metodo algebrico uniforme da E. Wölffing nella nota *Das Verhalten der Steiner'schen Cayley'schen und anderer Covarianter Curven in singulären Punkten der Grundcurve* (Zeitschr. f. Math., 40, 1893).

inspirandosi appunto a Clebsch, F. Lindemann con le ben note *Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch* (I Bd., Leipzig, 1876) (1).

8. Ma da queste *Vorlesungen* si apprende eziandio con facilità tutta la luce che sui fenomeni dello spazio projetta la teoria delle funzioni ellittiche e abeliane, la cui metodica applicazione alla geometria è pel Clebsch uno dei più solidi titoli di gloria imperitura. Tale applicazione venne da lui indicata in un caso particolarissimo (estensione allo spazio del problema di Malfatti) nella memoria intitolata *Anwendung der elliptischen Functionen auf ein Problem der Geometrie des Raumes* (Journ. f. Math., 53, 1857), ma è fatta conoscere in tutta la sua ampiezza in una collana di memorie dei cui anelli ricorderemo pel momento soltanto gli scritti pubblicati nel vol. 63 (1864) del Journ. f. Math., e che portano i titoli: *Ueber einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung, Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie, Ueber die Singularitäten algebraischer Curven* e *Ueber einige von Steiner behandelte Curven* (2). La tirannia dello spazio ci vieta di riassumere queste splendide memorie e la *Theorie der Abel'schen Functionen* (Leipzig, 1866), redatta in collaborazione col Gordan e ad esse strettamente collegata. Soltanto osserveremo che da esse emerge la capitale importanza per tutta la geometria delle curve piane della considerazione di quel numero, in cui già celebri analisti Abel (3) e B. Riemann (4) (1827-1866) (5) s'imbatterono, e che Clebsch introdusse come settima caratteristica di una curva e designò col nome di *Geschlecht*, mentre Cayley, nella sua nota

---

(1) Va qui ricordato anche il *Mémoire sur l'application des formes binaires à la géométrie* (Journ. de Math., III, 1, 1875) del Laguerre, benchè abbia un indirizzo differente da quello dei lavori di Clebsch.

(2) Sullo stesso tema si veggano le lettere del Lindemann e dell'Hermite (Journ. f. Math., 84, 1878), e il pregevole scritto di A. Buchheim, *On the Extension of certains Theories relating to Plane Cubics to Curves of any Deficiency* (Proc. L. M. S., 13, 1882).

(3) *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes* in *Œuvres complètes, éd. Sylow et Lie* (Christiania, 1881) 1.

(4) *Theorie der Abel'schen Functionen* (Journ. f. Math., 54, 1857).

(5) V.: *Bernhard Riemann's Lebenslauf* in fine di *Bernhard Riemann's Ges. math. Werke* (Leipzig, 1876) e Klein, *Riemann und seine Bedeutung für die Entwickelung der modernen Mathematik* (Verhand. der Gesell. deutscher Naturf. und Aerzte, Leipzig, 1894).

On the Transformations of Plane Curves (Proc. L. M. S., 1, 1865-66), preferì quello di *Deficiency*; noi italiani lo chiamiamo *genere* ed i francesi lo dicono *genre*.

Come l'ordine di una curva è un carattere invariantivo rispetto a trasformazioni projettive, il genere lo è rispetto a trasformazioni univoche qualunque: tale proprietà, a cui il genere deve principalmente la sua importanza, venne dimostrata per via trascendente nei lavori citati di Abel e Riemann, algebricamente nell'opera dianzi ricordata di Clebsch e Gordan, e geometricamente dal Cremona (nel § 58 dei *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*), dal Voss (nella *Note betreffend die eindeutige Transformation ebener Curven*, Götting. Nachr., 1873), dal Bertini (nell'articolo intitolato *Nuova dimostrazione del teorema: Due curve punteggiate projettivamente sono dello stesso genere* p, Giorn. di Math., 6, 1870), dallo Zeuthen (*Nouvelle démonstration de théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes* e *Addition*, Math. Ann., 3, 1871) — al quale ultimo geometra anzi si deve una generalizzazione estremamente notevole di quel teorema, espressa da un'equazione fra i generi di due curve, fra cui passa una corrispondenza algebrica qualunque (1) — e dallo Schubert (*Ueber die Erhaltung des Geschlechts bei zwei ein-eindeutig auf einander bezogenen Plancurven*, Math. Ann., 16, 1880). Aggiungiamo che, accanto al genere, si sogliono considerare certi numeri invarianti per trasformazioni univoche, cioè i " moduli " di una curva algebrica (2), collocando in una stessa " classe " le curve aventi eguali i generi ed i moduli, e che la determinazione del genere di una curva dotata di singolarità superiori è fatta nei lavori già citati (n. 5) sulle singolarità superiori ed in altri ancora (3).

Due cose devono ancor notarsi riguardo ai lavori di Clebsch di cui poco fa ci occupammo. La prima è che essi servirono di

---

(1) Una dimostrazione stereometrica della formola di Zeuthen, analoga a quella già citata del Cremona per la conservazione del genere, si legge nella nota *Ueber einen Beweis der Zeuthen'schen Verallgemeinerung des Satzes von der Erhaltung des Geschlechts* (Math. Ann., 29, 1887) di W. Weiss.

(2) V. fra altre la memoria di Casorati e Cremona *Intorno al numero dei moduli delle equazioni o delle curve algebriche di dato genere* (Rend. Ist. Lomb., II, 2, 1869).

(3) Halphen, *Sur la conservation du genre des courbes algebriques dans les transformations uniformes* (Bull. S. M. F., 4, 1875); Raffy, *Détermination du*

stimolo ai tentativi di sfruttare a pro della geometria le trascendenti abeliane ed altre ancora (1). La seconda è che, siccome molti dei risultati conseguiti in quei lavori si riferiscono a funzioni algebriche, così era supponibile poter essi venire raggiunti senza ricorrere a funzioni trascendenti; questa previsione venne splendidamente confermata dalla omai celebre memoria di Brill e Nöther *Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie* (Math. Ann., 7, 1874) e dai lavori che da essa rampollano (2), di cui i più cospicui sono riassunti nell' eccellente *Bericht* compilato da questi egregi geometri e che abbiamo citato nel n. 5. Però all'acuta analisi dei due citati scrittori, per deficienza di tempo, non poterono venire sottoposti alcuni lavori importanti, su cui io, come italiano, gioisco di attrarre l'attenzione degli scienziati; sono quelli che pubblicarono il Segre, il Bertini, il Castelnuovo ed altri che ne seguirono le orme; parecchi di essi verranno da noi citati nel seguire l'evoluzione della geometria a più dimensioni (v. Cap. XI), qui però segnaliamo subito due memorie riassuntive recenti, dallo studio delle quali è agevole formarsi un concetto della direzione comune in cui procedette e dei risultati che conseguì il manipolo di geometri sopra ricordati. Sono: E. Bertini, *La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico* (Ann. di Mat., II, 22, 1894); C. Segre, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (Id., ib.) (3).

9. Le investigazioni fin qui ricordate nel presente Cap. si riferiscono di regola ad una curva unica, benchè incidentalmente

---

genre d'une courbe algébrique (Math. Ann., 23, 1884); Baker, *The practical determination of the Deficiency (Geschlecht) and adjoint φ-curves for a Riemann surface* (Id., 45, 1894).

(1) Humbert, *Application géométrique d'un théorème de Jacobi* (Journ. de Math., IV, 1, 1885); *Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques* (Id., 2, 1886); *Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications géométriques* (Id., 3, 1887; 5, 1889; e 6, 1890).

(2) Molti furono già citati nel n. 6 perchè concernono i punti multipli.

(3) Vanno qui ancora ricordate le seguenti memorie del Küpper, che pel tema si collegano a quelle or nominate: *Zur Theorie der ebenen und Raumcurven. Die Curven* C^{2n}, C^{2n+1} *vom Maximalgeschlecht mit bez.* $(n-1)^2$, $n(n-1)$ *Doppelpunkten* (Prager Ber., 1888); *Ueber die auf einer Curven* m^{ter} *Ordnung* C_p^m *vom Geschlecht* p *von den* ∞^2 *Geraden G der Ebene ausgeschnittene lineare Schaar* g_m^2 (Math. Ann., 31, 1888); *Geometrische Betrachtungen auf Grundlagen der Functionentheorie* (Prager Ber., 1892); e *Bestimmung der Minimalgruppen für* C^m (Ivi).

in molte siano trattate delle questioni relative a gruppi di curve; in particolare, in quante di esse non sono considerati sistemi lineari di curve semplicemente (fasci) o doppiamente infiniti (reti)! D'altronde la teoria delle trasformazioni piane univoche conduce ad un'importante classe di reti, cioè le reti omaloidiche (v. Cap. VIII, n. 4), mentre lo studio della rappresentazione di una superficie su un piano (v. Cap. VIII, n. 8) impone la considerazione dei sistemi analoghi ∞^3, il cui studio diretto venne fatto assai bene da E. Caporali (1855-1886) (1) nella memoria *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve piane algebriche* (Coll. math., 1881). Nulla di più naturale adunque dell'essere in questi ultimi anni nata e fiorita la teoria generale dei sistemi lineari a quante si vogliano dimensioni di curve algebriche d'ordine qualunque, della quale ora daremo qualche notizia.

Un grande numero di ricerche che vi si riferiscono trattano della riduzione dei sistemi lineari a certi determinati tipi mediante trasformazioni univoche, ed hanno come loro punto di partenza un teorema di Nöther, di cui parleremo altrove (v. il n. 4 del Cap. VIII), che si legge dimostrato una prima volta nel t. 3 (pag. 165) dei Math. Ann. e più completamente nel t. 5 (p. 635) della medesima raccolta. Come prime sue derivazioni sono da considerarsi alcune delle *Ricerche* del Bertini *sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano* (Ann. di Mat., II, 8, 1877), ove le argomentazioni del Nöther, opportunamente generalizzate, conducono a nuove ed importanti conseguenze; a questo scritto tengon dietro, dopo un lungo intervallo, quelli del Guccia (*Generalizzazione d'un teorema di Nöther* e *Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche,* Palermo Rend., 1, 1887), e del Martinetti (*Sui sistemi lineari di genere uno,* Rend. Ist. Lomb., II, 20, 1887; *Sopra una classe di sistemi lineari di curve piane algebriche*, Palermo Rend., 1, 1887; e *Sopra alcuni sistemi lineari di curve piane algebriche di genere due,* Ib. id.), nonchè quelli assai più estesi del Jung (*Ricerche sui sistemi lineari di genere qualunque,* Ann. di Mat., II, 15 e 16, 1888 e 1889; cfr. anche Ib. 18, 1890, p. 129; *Delle famiglie associate di sistemi lineari,* ecc., Palermo Rend., 4, 1890).

---

(1) Cfr.: G. Loria, *L'opera scientifica di Ettore Caporali* (Giorn. di Mat., 27, 1889).

Un teorema fondamentale di natura differente era già stato molto prima scoperto dal Bertini (*Sui sistemi lineari,* Rend. Ist. Lomb., II, 15, 1882; cfr. Lüroth, *Beweis eines Satzes von Bertini über lineare Systeme ganzer Functionen,* Math. Ann., 42, 1893, e 44, 1894), geometra al quale si devono anche delle ricerche *Sulle curve fondamentali dei sistemi lineari di curve piane algebriche* (Palermo Rend., 3, 1889).

Una *instauratio ab imis fundamentis* nell'indirizzo delle indagini sopra i sistemi lineari si è manifestata quando si pensò di ricorrere per studiarli alle proposizioni della " geometria su una curva algebrica " ch'erano state scoperte in gran parte col mezzo della teoria delle funzioni algebriche; il vantaggio di tale applicazione fu segnalato dal Segre in una breve nota *Sui sistemi lineari* (Palermo Rend., 1) e confermato dal Castelnuovo in due lavori *Sulle superficie le cui sezioni piane sono curve iperellittiche* (Palermo Rend., 4, 1890) e sulla *Massima dimensione dei sistemi lineari di curve piane di dato genere* (Ann. di Mat., II, 18, 1890) (1); ma essa fu dimostrata inconfutabilmente dall'altro lavoro di quest'ultimo geometra intitolato: *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* (Torino Mem., II, 42, 1891; cfr. Ciani, *Sopra i sistemi lineari di curve piane algebriche,* Giorn. di Mat., 33, 1895), ricco di concetti importanti ed originali destinati a venire continuamente sfruttati dai futuri cultori della geometria e capace a saldare per sempre il legame fra la teoria dei sistemi lineari e le ricerche inaugurate da Brill e Nöther.

Con i lavori del Castelnuovo non hanno dipendenza nè la memoria di K. Doehlemann *Ueber lineare Systeme in der Ebene und im Raum und über deren Jacobi'sche Curve beziehungsweise Jacobi'sche Fläche* (Math. Ann., 41, 1893), nè le *Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane, dotati di singolarità qualunque* (Palermo Rend., 7, 1893, e 9, 1895) del Guccia, giacchè l'uno e l'altro scritto trattano di preferenza di curve generabili

(1) Più generalmente: si chiami " lineare " un sistema di curve determinato su una superficie da un sistema lineare di superficie; allora la questione sciolta dal Castelnuovo in questa nota è inclusa in altra più generale, alla risoluzione della quale è dedicata la nota dell'Enriques *Sulla massima dimensione dei sistemi lineari di curve di dato genere appartenenti ad una superficie algebrica* (Torino Atti, 29, 1894); v. anche l'articolo dello stesso autore intorno a *Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Lincei Rend., V, 2, 1893).

con sistemi lineari proiettivi e di sistemi di dimensioni particolari con speciale riguardo a certe loro figure covarianti. Alla prima parte delle *Ricerche* testè ricordate si può allacciare il lavoro del Gerbaldi *Sulle singolarità della Jacobiana di tre curve piane* (Palermo Rend., 8, 1894), il quale, fra l'altro, conferma che l'Hessiana d'una curva generale è esente da singolarità, proposizione questa che fu ammessa come postulato dal Cremona e dimostrata per le curve di 4° ordine dal Geiser (*Sopra la teoria delle curve piane di quarto grado,* Ann. di Mat., II, 9, 1878) ed in generale, una prima volta dal Del Pezzo (*Sulla curva Hessiana,* Napoli Rend., 22, 1883) e più recentemente dal Valentiner (*Bevis for at den Hesseske Curve i Almindelighed ikke har noget Dobbeltpunkt,* Tidsskrift, V, 6, 1888); a tal proposito osserveremo che il modo di comportarsi dell'Hessiana di una curva in un punto singolare venne studiato dal Brill nella memoria *Ueber die Hessé'sche Curve* (Math. Ann., 13, 1878; cfr. anche Elliot, *Sur les points d'inflexion des courbes algébriques,* Bull. Sc. Math., II, 2, 1878, e dal Segre nella nota *Sulla forma Hessiana* (Lincei Rend., V, 4 1895_2) (1).

Alle investigazioni intorno ai sistemi lineari si può da un certo punto di vista riattaccare la generalizzazione che ai dì nostri ricevette l'antica teoria della polarità rispetto a una curva (od a una superficie) d'ordine qualunque, di cui si occuparono W. K. Clifford (1845-1879) (2) (*On a Generalization of the Theory of Polars,* Proc. L. M. S., 2, 1868), il Grassmann (*Verwendung der Ausdehnungslehre für die allgemeine Theorie der Polaren und den Zusammenhang algebraischer Gebilde,* Journ. f. Math., 84, 1878), P. Serret (*Sur un principe unique contenant toute la théorie des courbes et des surfaces d'ordre ou de classe quelconque* (C. R., 86, 1878), e R. De Paolis (1854-1892) (3) (*Alcune applicazioni della teoria generale delle curve polari,* Lincei Mem., IV, 3, 1885-1886).

---

(1) Su molte ricerche intorno a speciali sistemi di curve ci è forza stendere il velo del silenzio. Facciamo un'eccezione pel teorema di Lie " Se le curve di una schiera continua di curve piane si possono accoppiare in modo che le curve corrispondenti determinino su qualunque trasversale delle coppie di punti in involuzione, esse curve sono le coniche di un fascio ", teorema che G. Scheffers dimostrò recentemente nella nota intitolata:. *Curvenschaaren, die auf jeder Geraden eine Involution bestimmen* (Leipziger Ber., 44, 1892).

(2) V. la *Preface* di R. Tucker e l'*Introduction* di H. J. S. Smith a *Mathematical Papers by W. K. Clifford* (London, 1882).

(3) Cfr. C. Segre, *Riccardo de Paolis* (Palermo Rend., 6, 1892).

10. Gli studî intorno alle curve piane, di cui sin qui additammo i varî indirizzi ed i risultati di maggior rilievo, sono tutti derivazioni più o meno evidenti del concetto di sfruttare la scienza del numero a profitto della scienza della estensione. Tuttavia non è a credere che l'uso costante di coordinate sia indispensabile a chi voglia emulare Eulero e Cramer, Plücker e Salmon nell'esporre metodicamente la teoria delle curve piane. Ha tentato per primo di dimostrarlo Steiner, il quale in una comunicazione giustamente celebre fatta nel 1848 all'Accademia di Berlino (riprodotta nel t. 47, 1854, del Journ. f. Math., sotto il titolo di *Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven*) riprese la teoria delle polari d'un punto rispetto ad una curva — che il Bobillier aveva già da tempo fondata (1) come estensione della teoria delle curve diametrali (o diametri curvilinei) di Newton e Cramer, e di cui il Grassmann stesso erasi dianzi occupato designandola col nome di *Theorie der Centralen* (Journ. f. Math., 24, 1842, e 25, 1843) — e dimostrò come essa potesse fungere da fondamento ad una trattazione metodica delle curve algebriche. Fra i concetti nuovi introdotti da Steiner basti qui ricordare le notevoli curve covarianti ad una data che oggi si designano coi nomi di Steiner stesso, di Hesse e di Cayley. Questi brevi cenni, assieme alle indagini del medesimo Steiner, dello Chasles (2) e del De Jonquières (3)

---

(1) *Démonstration de quelques théorèmes sur les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres, Recherches sur les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres, Recherches sur les lois génerales qui régissent les lignes et les surfaces algébriques* (Ann. de Math., 18, 1827-28); *Recherches sur les lois générales qui régissent les courbes algébriques* e *Théorèmes sur les polaires successives* (Id., 19, 1828-29) Cfr. anche De Jonquières, *Mémoire sur la théorie des pôles et des polaires dans les courbes d'ordre quelconque* (Journ. de Math., II, 2, 1857).

(2) *Détermination du nombre des points qu'on peut prendre arbitrairement sur une courbe donnée d'ordre* n *pour former la base d'un faisceau de courbes d'ordre* $m < n$ (C. R., 45, 1857); *Deux théorèmes généraux sur les courbes et les surfaces géométriques de tous les ordres* (Id. ib.; cfr. anche i *Théorèmes concernant la détermination sur une courbe géométrique, d'une série de groupes de points en nombre déterminé*, Id. 73, 1871).

(3) *Essai sur la génération des courbes géométriques, et en particulier sur celle de la courbe du quatrième ordre* (Mém. prés., 16, 1856); *Note relative à la construction de diverses courbes à trois points multiples de degrés supérieurs et théorèmes relatifs à ces courbes.* (Ann. di Mat., 1, 1858). Sullo stesso argomento si vegga: Härtenberg, *Ueber die Erzeugung geometrischer Curven* (Journ. f. Math., 58, 1861); A. Olivier, *Ueber einige allg. Eigenschaften der geometrischen Curven* (Id., 70, 1869), *Zur Theorie der Erzeugung geometrischer Curven* (Id., 71, 1870), *Ueber die Methode, die Ordnungszahl einer*

intorno alla generazione delle curve algebriche col mezzo di fasci proiettivi di curve d'ordine inferiori, costituiscono i materiali primi di cui si giovò il Cremona nel comporre la sua famosa *Introduzione a una teoria geometrica delle curve piane* (Bologna Mem., 12, 1862; tradotta in tedesco da M. Curtze, Greifswald, 1865), nella quale sono esposte con metodo uniforme, assieme a molti nuovi ed importanti risultati, tutte le proprietà delle curve piane scoperte dai geometri analisti antecedenti (1).

Che però il lavoro del Cremona non possa soddisfare i geometri sintetici intransigenti è dimostrato, fra l'altro, dal fatto che la proposizione fondamentale da lui designata col nome di " porisma di Chasles " (nn. 36-37 della trad. ted.) non è altro che l'equazione d'una curva algebrica in coordinate trilineari. Non si deve adunque stupire se nel 1882 l'Accademia di Berlino abbia scelto come tema del premio Steiner l'estensione alle curve e superficie algebriche d'ordine qualunque delle ricerche di geometria pura che Staudt condusse a buon termine per le curve e superficie di secondo ordine. Una prima volta tale questione non ricevette alcuna risposta soddisfacente, ma nel 1886 E. Kötter venne premiato grazie alla memoria intitolata *Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen Curven*, stampata più tardi in

---

Curve zu finden, welche durch zwei projektivische Curvenbüschel erzeugt wird (Id. ib.) e Joerres, *Einige allgemeine Sätze über ebene Curven und über Flächen mit Anwendungen auf Curven und Flächen zweiter und dritter Ordnung* (Id., 77, 1870); Bobek, *Ueber projectivische Erzeugung von Curven* (Math. Ann., 25, 1885); Study, *Ueber Schnittpunktfiguren ebener algebraischer Curven* (Id., 36, 1890). Di recente il De Jonquières è ritornato sulla generazione con fasci projettivi occupandosi delle curve con punti doppî (C. R., 105, 1887); ma alcune conclusioni a cui egli giunse vennero confutate dal Küpper nella nota *Die Abzählung als Fehlerquelle in der modernen Geometrie* (Math. Ann., 31, 1888). Un'altra generazione analoga venne indicata da Em. Weyr (1848-1894) nell'interessante nota *Erzeugung algebraischer Curven durch projectivischen Involutionen* (Math. Ann., 3, 1871). Di natura differente invece è quella di Grassmann esposta nei *Grundzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Curven, mit Anwendung einer rein-geometrischen Analyse* (Journ. f. Math., 31, 1846) e nell'altro lavoro sopra *Der allgemeine Satz über die Erzeugung aller algebraischen Curven durch Bewegung gerader Linien* (Id., 42, 1851) e commentato da V. Schlegel nella nota *Ueber die mechanische Erzeugung von Curven* (Math. Ann., 6, 1873).

(1) Per complementi all'*Introduzione* possono considerarsi le note: Cremona, *Sopra alcune questioni nella teoria delle curve piane* (Ann. di Mat., 6, 1864); Köhler, *Sur les réseaux des courbes planes* (Bull. S. M. F., 1, 1875); e Kohn, *Ueber die Satellitcurven und Satellitflächen* (Wiener Ber., 89, 1884).

Berl. Abh., 1887, ed alla quale serve da proseguimento l'altro lavoro del medesimo autore *Die Hesse'sche Curve in rein geometrischen Behandlung*, Math. Ann., 34, 1889). Il procedimento di soluzione scelto dall' autore non si può compendiare in poche sentenze e (notiamolo di passaggio) ha bisogno di venire ancora elaborato prima di poter penetrare nell' insegnamento; esso si accosta di preferenza alle ricerche di Steiner, inquantochè le curve dei differenti ordini vengono generate col mezzo di fasci proiettivi di curve d'ordini inferiori.

Sembra invece che alle ricerche di Staudt (definizione di una conica col mezzo di sistemi polari) divisasse avvicinarsi il De Paolis nella soluzione da lui immaginata pel problema proposto dall'Accademia di Berlino; sventuratamente tale soluzione rimarrà per sempre sconosciuta (1), perchè la morte colse l'inventore quando egli aveva pubblicato due lavori sulla questione (2) di non piccola importanza, ma che sono da ritenersi soltanto quali preliminari remoti della soluzione stessa.

Aggiungeremo che, prima e dopo dei geometri citati, di questioni collegate alla teoria rigorosamente sintetica delle curve piane (e delle superficie) algebriche, molti altri si occuparono; dei loro lavori ricordiamo i seguenti: Schur, *Eine geometrische Ableitung der Polareigenschaften der ebenen Curven* (Zeitschr. f. Math., 22, 1877); Thomae, *Die Definition der geometrischen Gebilde durch Construction ihrer Polar-systeme* (Id., 24, 1879); Kohn, *Zur Theorie der harmonischen Mittelpunkte* (Wiener Ber., 1883) e *Eine Definition der Polaren* (Palermo Rend., 7, 1893); R. Schumacher, *Die Punktsysteme auf der Geraden und ihre Anwendung zur Erzeugung der algebraischen ebenen Curven* (Journ. f. Math., 110, 1892, e 111, 1893); Guccia, *Una definizione sintetica delle curve polari* (Palermo Rend., 7, 1893); ai quali si possono aggiungere i due che vennero premiati nel 1868 dall'Accademia di Berlino, cioè: H. J. S. Smith, *Mémoire sur*

---

(1) Cfr. la nota del Segre in calce alla nota postuma del De Paolis intitolata *Teoria generale delle corrispondenze proiettive e degli aggruppamenti proiettivi nelle forme fondamentali a due dimensioni*(Lincei Rend., V, 2, 1894_2).

(2) *Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi* (Mem. Soc. XL, III, 7, 1890) e *Le corrispondenze proiettive nelle forme geometriche fondamentali di 1ª specie* (Torino Mem. II, 42, 1892).

quelques problèmes cubiques et biquadratiques (Ann. di Mat., II, 3, 1869-70) e Kortum, *Ueber geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades* (Bonn, 1869).

11. Accanto alla collezione di scritti derivanti dal desiderio di scoprire quali siano le proprietà comuni a tutte le curve algebriche qualunque ne sia l'ordine e dei quali tentammo nelle pagine precedenti di porgere un'idea al lettore, un'altra ne esiste non meno ricca, ma più variopinta e che, trattando di curve caratterizzate da qualche specialità, dovrebbe giudicarsi per meno importante ove non si riflettesse che lo spirito umano procede dal particolare all'universale e che quindi molte investigazioni non dotate di grande generalità devono giudicarsi di gran valore se non altro per essere state o perchè presumibilmente diverranno il primo passo verso proposizioni estese. Gli è di questo secondo gruppo di lavori che ora ci occuperemo.

Per porre un po' d'ordine nelle svariatissime ricerche sulle curve speciali, tratteremo dapprima delle curve d'*ordine particolare,* poi di quelle di *genere particolare* e finalmente di quelle (non tutte necessariamente algebriche) soddisfacenti ad una o più condizioni comuni.

Fra le curve d'ordine determinato spetta il primo posto alle sezioni coniche; ma chi mai potrebbe illudersi di dare un concetto almeno approssimato delle innumerevoli ricerche che su di esse vennero compiute nei venti secoli in cui vennero studiate, delle innumerevoli qualità che in esse vennero segnalate e che ogni dì crescono, dei differenti punti di vista da cui vennero considerate? Una semplice raccolta dei teoremi che ora possediamo su quelle celebri curve riempirebbe più di un grosso volume: sia lecito a noi di non accordare la preferenza ad alcuno, rimandando il lettore alle molte pregevoli esposizioni geometriche ed analitiche che ne possediamo. E passiamo a dire qualche cosa delle curve di terz'ordine, su cui pure la letteratura è tanto estesa che, nell'accingerci a rendere conto delle produzioni più cospicue in essa contenute, noi sentiamo il bisogno (più che in qualunque altra occasione) d'invocare l'indulgenza del lettore per le lacune e le involontarie ingiustizie che per fermo non riusciremo ad evitare.

Molte rilevanti ricerche di varia natura sulle cubiche piane

si apprendono dalle opere d'Eulero, di Cramer e di Plücker citate nelle pagine precedenti, nonchè dall'*Enumeratio* di Newton e dal *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus* (London, 1720) del Maclaurin. In Inghilterra queste curve continuarono a venir studiate anche in tempi a noi vicini; al Salmon infatti si deve la scoperta dell'importante proposizione che afferma la costanza del rapporto anarmonico delle quattro tangenti condotte alla curva da un puntò arbitrario di essa (*Théorèmes sur les courbes de troisième degré,* Journ. f. Math., 42, 1851; cfr. R. Sturm, *Ueber die ebenen Curven dritter Ordnung,* Id., 90, 1881 e V. Jamet, *Sur le rapport anharmonique d'une courbe du troisième ordre,* Bull. S. M. F., 15, 1887), proposizione assai notevole che venne utilizzata più tardi dal Cremona per classificare le curve in questione (*Considerazioni sulle curve piane del terz'ordine,* Giorn. di Mat., 2, 1864); d'altronde al Cayley si devono interessanti ricerche sui punti corrispondenti d'una cubica (*Mémoire sur les courbes du troisième ordre,* Journ. de Math., 9, 1844; *Nouvelles remarques sur les courbes du troisième ordre,* Id., 10, 1845), nonchè delle importanti investigazioni analitiche che condussero alla scoperta di parecchie curve covarianti ad una cubica (*A Memoir on Curves of the Third Order,* Phil. Trans., 147, 1857; *On the Tangential of a Cubic,* Id., 148, 1858), ed altre, di cui pel momento ricordiamo soltanto quelle *On a Case of the Involution of Cubic Curves* (Cambridge Trans., 11, Part I, 1866; cfr. i due articoli *On the Cubic Centres of a Line with respect to Three Lines and a Line,* Phil. Mag., 20, 1860, e 22, 1861), e quelle *On the Mechanical Description of a Cubic Curve* (Proc. L. M. S., 4, 1871-73); finalmente a Sylvester dobbiamo l'elegante teoria dei punti residui che tutti conoscono grazie al Cap. V del *Treatise on Higher Plane Curves* del Salmon (1).

Speciali modi per generare una curva di terz'ordine si apprendono dagli scritti di Cayley testè ricordati e da altri che saranno citati poi; di tale questione si occuparono anche Chasles (*Con-*

---

(1) Fra le applicazioni recenti della teoria di Sylvester ricorderemo quelle che si leggono nella nota del Valentiner, *Om Konstruktionen af Curver af 3die og 4de Orden, bestemte ved at skulle gaae gjennem hendholdsvis 9 og 14 Punkter* (Nyt Tidsskrift for Math., 3, 1892).

struction de la courbe du troisième ordre déterminée par neuf points, C. R., 36, 1853) e poi *ex-professo* il Grassmann (*Ueber die Erzeugung der Curven dritter Ordnung durch gerade Linien und über geometrische Definitionen dieser Curven,* Journ. f. Math., 36, 1838; *Die lineale Erzeugung von Curven dritter Ordnung,* Id., 52, 1856), il Clebsch (*Ueber zwei Erzeugungsarten der ebenen Curven dritter Ordnung,* Math. Ann., 5, 1872), lo Schröter (1829-1892) (*Ueber eine besondere Curve dritter Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Curven dritter Ordnung,* Id., ib.; *Ueber Curven dritter Ordnung,* Math. Ann., 6, 1873; *Zurückführung der Grassmannschen Definition der Curve dritter Ordnung auf die von Chasles, Cayley und Hesse angegebenen Erzeugungsweisen,* Journ. f. Math., 104, 1889), il Durège (*Ueber die Curven dritter Ordnung welche den geometrischen Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar bildet,* Math. Ann., 5, 1872) e l'Heger (*Eine Construction von Curven dritter Ordnung aus conjugierten Punkten,* Zeitschr. f. Math., 25, 1880). Alle due prime fra le or nominate memorie dello Schröter ed a quella del Durège sono collegate quella dell'Harnack *Ueber lineare Constructionen von ebenen Curven dritter Ordnung* (Zeitschr. f. Math., 22, 1877), di T. Walter *Ueber den Zusammenhang der ebenen Curven dritter Ordnung mit Kegelschnittschaaren* (Diss. Giessen, 1878), dell'Hurwitz *Ueber die Schröter'sche Construction der ebenen Curven dritter Ordnung* (Journ. f. Math., 107, 1891) e del Bobek sopra *Die Brennpunktscurven des Kegelschnittsbüschel* (Monatshefte, 3, 1892).

Sui punti d'inflesso e più generalmente sulle linee aventi con una data cubica dei contatti assegnati, Steiner enunciò parecchie eleganti proposizioni (*Sätze über Curven zweiter und dritter Ordnung,* Journ. f. Math., 32, 1846), che vennero poi dimostrate da F. August (*Ein Steiner'scher Satz über Krummungskreise bei Kegelschnitten und ein allgemeinerer Steiner'scher Satz über osculirende Kegelschnitte bei Curven dritten Grades,* Journ. f. Math., 68, 1868), dal Durège (*Ueber die Kegelschnitte welche eine Curve dritter Ordnung osculieren,* Prager Ber., 1871) e dal Gent (*Ueber den Zusammenhang der Systeme derjenigen Punkte, in welchen Kegelschnitte eine allgemeine Curve dritter Ordnung osculiren,* Zeitschr. f. Math., 17, 1872); di questioni affini si occuparono con successo anche Hesse (*Ueber die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung,* Journ. f. Math., 28, 1844; *Ueber die Curven*

dritter Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Curven in drei verschiedenen Punkte berühren, Id., 36, 1848; *Ueber Curven dritter Klasse und Curven dritter Ordnung,* Id., 38, 1849; *Eigenschaften der Wendepunkte der Curven dritter Ordnung und der Rückkehrtangenten der Curven dritter Klasse,* Id. ib.), Clebsch (*Ueber die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung,* Id., 58, 1861), G. Battaglini (1826-1894) (1) (*Sulle cubiche ternarie sizigetiche,* Coll. math.), il Servais (*Sur les coniques osculatrices dans les courbes du troisième ordre,* Belgique Bull. III, 23, 1892), W. Wirtinger (*Ueber eine Eigenschaft der Wendetangenten der Curven dritter Ordnung,* Monatshefte, 4, 1893), G. Kohn (*Bemerkung über die Kegelschnitte welche sechs Wendetangenten einer* C^3 *berühren,* Ivi), A. Wiman (*Om inflexionspunkterna til plana kurvor of tredje ordningen,* Nyt Tidsskrift for Math., 5, 1894) e Ferrers (*On the Inflexional Tangents of a Cubic and the Conics touched by them,* Mess., 24, 1894-95).

Su certe classi di poligoni inscritti in una cubica piana vertono alcuni *Geometrische Lehrsätze* di Steiner (Journ. f. Math., 32, 1846) ed i lavori intesi a dimostrarli e che citammo altrove (Cap. I, n. 13), nonchè la nota di Grassmann *Zur Theorie der Curven dritter Ordnung* (Götting. Nachr., 1872), i *Teoremi sui poligoni di Steiner inscritti in una curva di terzo ordine* (Palermo Rend., 5, 1891) del Martinetti e le due note di Em. Weyer *Ueber Fünfecke, welche einer* C_3 *gleichzeitig ein- und umgeschrieben sind* e *Ueber Vierecke, welche einer* C^3 *gleichzeitig ein und umgeschrieben sind* (Monatshefte, 4, 1893).

Col solo sussidio della geometria sintetica le cubiche piane furono studiate dal Küpper (*Ueber Curven dritter Ordnung als Einhüllenden von Kegelschnitte,* Prager Ber., 1871, *Beiträge zur Theorie der Curven dritter und vierter Ordnung,* Prager Abh., VI, 5, 1871), da R. Slawyk (*Die Polareigenschaften der allgemeinen ebenen* C_3, Diss. Breslau, 1872), dal Milinowski (*Zur Geometrie der ebenen Curven dritter Ordnung,* Journ. f. Math., 78, 1874 (2); *Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven*

(1) Cfr. E. d'Ovidio, *Commemorazione del Socio Giuseppe Battaglini* (Lincei Mem., V, 1, 1895).

(2) Ivi si leggono le dimostrazioni pei teoremi sulle cubiche che Steiner enunciò nella sua grande memoria sulle curve a centro.

dritter Ordnung, Zeitschr. f. Math., 21, 1876; *Synthetischer Beweis, dass jede ebene Curve dritter Ordnung durch einen Kegelschnittbüschel und einen ihm projectiven Strahlenbüschel erzeugt werden kann,* Id., 23, 1878; *Zur Polarentheorie der Curven und Flächen dritter Ordnung,* Journ. f. Math., 89, 1880), dallo Schur (*Synthetischer Beweis der Identität einer Tripelcurve mit dem Erzeugniss eines Kegelschnittsbüschels und eines ihm projectiven Strahlbüschels,* Zeitschr. f. Math., 24, 1879), da S. Kantor (*Una semplice generazione della curva Jacobiana di una rete di curve di 3° ordine,* Lincei Rend., III, 3, 1879), dall'Ameseder (1858-1891) (*Notiz über Tripel einer Curve dritter Ordnung welche denselbe Höhenschnintt-punkt haben,* Zeitschr. f. Math., 28, 1883), dal Reye (*Die Geometrie der Lage,* 3ᵉ Anfl. I Abth., Leipzig 1886, p. 237, e segg.), dal London (*Ueber die Polarfiguren der ebenen Curven dritter Ordnung,* Math. Ann., 36, 1890) e dal Kötter (*Einige Hauptsätze aus der Lehre von den Curven dritter Ordnung,* Id., 38, 1891, e *Note über ebene Curven dritter Ordnung,* Journ. f. Math., 114, 1894 (1). A queste memorie si possono riavvicinare le ricerche di M. Disteli *Zur Configuration der Wendepunkte der allgemeinen ebenen Curven dritter Ordnung* (Wolf Zeitschr., 24 1890), ove la cubica viene considerata come la proiezione di una quartica gobba di prima specie fatta da un suo punto, e le numerose costruzioni pel nono punto comune a tutte le cubiche passanti per gli stessi otto punti di cui le più notevoli sono forse quelle che si leggono nei lavori seguenti: Weddle e Hart, *Construction by the Rule alone to determine the ninth Point of Intersection of two Curves of the Third Order* (Cambridge Journ., 6, 1851); Hart, *On the Intersection of Plane Curves of the Third Order* (Dublin Trans., 1878); Chasles, *Principe de correspondance entre deux objets variables, qui peut être d'un grand usage en géométrie* e *Note sur les courbes du troisième ordre, concernant les points d'intersection de ces courbes entre elles ou par des lignes d'ordre inférieur* (C. R., 41, 1855); Cayley, *On the Construction of the Ninth Point of Intersection of the Cubic which pass through eight given Points* (Quart. Journ., 5, 1862); Müller,

(1) In quest' ultimo lavoro sono esposte alcune semplicissime considerazioni geometriche che abilitano a concludere la rappresentazione parametrica dei punti di una cubica, di cui parliamo più innanzi.

Ueber eine geometrische Verwandschaft fünften Grades (Math. Ann., 2, 1870); London, *Lineare Constructionen des neunten Schnittpunktes zweier Curven dritter Ordnung* (Id., 36, 1890); Russell, *Rule Constructions in connexion with Cubic Curves* (Irish Trans.. 30, 1892); Beyel, *Construction der Curven dritter Ordnung aus neun gegebenenen Punkten und Construction der neunten Punktes zu acht Grundpunkten eines Büschels von Curven dritter Ordnung* (Zeitschr. f. Math., 40, 1895); Lange, *Zeichnung des neunten Schnittpunktes zweier Kurven 3. Ordnung* (Wismar, 1895).

In campi contigui a quelli finora considerati si aggirano alcune indagini su poligoni polari e su altre figure collegate ad una cubica piana; nell'impossibilità di descriverne a parte il contenuto ci limitiamo far menzione dei lavori in cui furono pubblicate: Geiser, *Ueber zwei geometrische Probleme* (Journ. f. Math.. 67, 1867) (1); Siebeck, *De triangulo, cuius latera continent polos respectu quatuor sectionum conicarum coniugatos* (Ann. di Mat., 2. 1868-69); H. J. S. Smith, *Observatio geometrica* (Id., ib.) e *On some Geometrical Constructions* (Proc. L. M. S., 2, 1868); Em. Weyr, *Zur Erzeugung der Curven dritter Ordnung* (Wiener Ber., 1868), *Die Erzeugung der Curven dritter Ordnung mittelst symmetrischer Elementarsysteme zweiten Grades* (Id., 1874), *Die Curven dritter Ordnung als Involutionscurven* (Prager Ber., 1877) e *Ueber eindeutige Beziehungen auf eine allgemeinen ebenen Curven dritter Ordnung* (Wiener Ber., 1883); Grassmann, *Ueber zusammengehörige Pole* (Götting. Nachr., 1872); Caporali, *Teoremi sulle curve e sui fasci di curve del terz'ordine* (Lincei Trans., III, 1, 1877), *Alcuni teoremi sui fasci sizigetici di curve del terzo ordine* e *Sulla figura costituita dai punti di contatto delle tangenti condotte ad una cubica da tre suoi punti in linea retta* (scritti postumi pubblicati fra le *Memorie di Geometria di Ettore Caporali*, Napoli. 1888); Laguerre (1834-1886) (2) *Sur les courbes de la troisième classe* (Journ. de Math., III, 4, 1878); Clifford, *The polar Theory of Cubics* (frammento inserito fra i *Mathematical Papers by W. K. Clifford*, London, 1882); Folie e Le Paige, *Mémoire sur les courbes*

---

(1) Una generalizzazione di tali problemi venne indicata dal Milinowski nella *Bemerkung zu des Geisersche die Curve dritter Ordnung betreffende Abhandlung*, ecc. (Journ. f. Math., 77, 1874).

(2) Cfr. E. Rouché, *Edmond Laguerre, sa vie et ses travaux* (Journ. Éc. pol., 56e cah., 1887).

du troisième ordre (Belgique Mém., 43, 1880 e 45, 1882); Le Paige, *Sur les courbes du troisième ordre* (Belgique Bull., III, 4, 1882) e *Sur une propriété des cubiques planes* (Prager Ber., 1882); Martinetti, *Ricerche sulle curve piane del terzo ordine* (Giorn. di Mat., 23, 1885); R. A. Roberts, *On Triangles of Maximum and Minimum Area inscribed in a Plane Cubic* (Mess., 15, 1885); O. Schlesinger, *Ueber conjugierte Curven, insbesondere über die geometrische Relation zwischen einer Curve dritter Ordnung und einer zu ihr conjugierten Curve dritter Classe* (Math. Ann., 31, 1887; cfr. 33, 1889); P. Serret, *Sur une série récurrente de pentagones, inscriptibles à une même courbe générale du troisième ordre, et que l'on peut construire par le seul emploi de la règle* (C. R., 115, 1892); J. de Vries, *Polygones cycliques sur courbes cubiques planes* (Archives Néerlandaises, 25, 1893); Miss C. A. Scott, *On plane Cubics* (Proc. R. S., 44, 1894).

Le coordinate dei punti di una curva generale del terzo ordine sono esprimibili mediante funzioni ellittiche di un parametro; di tale rappresentazione e delle conseguenze geometriche che se ne possono dedurre si occuparono: Durège, *Ueber Curven dritter Ordnung und ihre Abbildung auf einem Kreise* (Zeitschr. f. Math., 17, 1872); Harnack, *Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades* (Math. Ann., 9, 1876); Hermite, *Extrait d'une lettre adressée à M. Fuchs* (Journ. f. Math., 83, 1877); Halphen, *Recherches sur les courbes planes du troisième degré* (Math. Ann., 15, 1879) e *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications* (II partie, Paris, 1888, XI chap.); Picquet, *Applications de la représentation des courbes du troisième degré à l'aide des fonctions elliptiques* (Journ. Éc. pol., 44ᵉ cah., 1885); O. Schlesinger, *Ueber die Verwerthung der θ-Functionen für die Curven dritter Ordnung nebst einer Anwendung auf die zu einer Curve dritter Ordnung apolaren Curven* (Math. Ann., 31, 1888); Valyi, *Zur Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung und sechster Classe* (Math. und naturwiss. Ber. aus Ungarn, 9, 1892 e 10, 1893).

Fra un altro ramo d'analisi e le curve generali del terz'ordine esiste una parentela assai stretta; intendiamo alludere alla teoria delle forme ternarie cubiche di cui ogni formola può interpretarsi come un teorema sulle cubiche piane, di cui ogni progresso corrisponde ad una nuova cognizione intorno a queste

figure geometriche; esce dal nostro tema il seguire l'evoluzione e ritrarre lo stato attuale di quella importante teoria, ma vogliamo almeno ricordare le memorie di Aronhold (1819-1884) (Journ. f. Math., 39, 1850, e 55, 1858), e Clebsch e Gordan (Math. Ann., 6, 1873) le quali a buon diritto meritano l'epiteto di fondamentali su tale argomento.

Una curva del terzo ordine non può specializzarsi proiettivamente che per la presenza di un punto doppio o di una cuspide; la curva allora acquista delle proprietà particolari assai notevoli, di cui basti qui ricordare l'esprimibilità delle sue coordinate mediante forme binarie cubiche, la quale fa apparire per identiche la ricerca delle proprietà delle cubiche razionali e quella delle proprietà di una terna di forme binarie cubiche. Sia sfruttando questo legame, sia con considerazioni dirette, le curve in discorso furono molto studiate in molti lavori di cui ricorderemo i seguenti: Durège, *Ueber fortgesetzes Tangentenziehen an Curven dritter Ordnung mit einem Doppel- oder Rückkehrpunkte* (Math. Ann., 1, 1869); Rosenow, *Die C_3 mit einem Doppelpunkt* (Diss. Breslau, 1873); Em. Weyr, *Ueber Punktsysteme auf Curven 3ter Ordnung* (Zeitschr. f. Math., 15, 1870), *Ueber die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt* (Math. Ann., 3, 1870), *Zur Geometrie des Curven 3ter Ordnung* (Zeitschr. f. Math. 15, 1870), *Sulle curve piane razionali del terz'ordine* (Giorn. di Mat., 9, 1871), *Ueber Projectivitäten und Involutionen auf ebenen rationalen Curven dritter Ordnung* (Wiener Ber., 1880), *Ueber dreifach-berührende Kegelschnitte einer ebenen Curve dritter Ordnung und vierter Classe* (Id., 1879), *Ueber die Abbildung einer rationalen ebenen Curve dritter Ordnung auf einen Kegelschnitt* (Id., ib.); Ed. Weyr, *Ueber die Doppelelemente projectivischer Gebilde und deren Bedeutung für Curven dritter Ordnung und Classe* (Prager Ber., 1869); Igel, *Ueber ebene Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt* (Math. Ann. 6, 1873); Juel, *Geometriske Beviser for nogle Sätninger om kurver af tredie Orden med et, og kurver af fijerde Orden med tre Dobbeltpunkter* (Tidsskrift, IV, 1, 1877); Pittarelli, *Sulle curve del terz'ordine con un punto doppio* (Napoli Rend., 24, 1885), *Le curve di 3° ordine e di 4a classe* (Id., ib.) e *Le cubiche con un punto doppio e la corrispondenza* (1, 2) (Lincei Mem., IV, 3, 1886; questo scritto fa seguito allo *Studio algebrico-geometrico intorno alla corrispondenza*

(1, 2) inserito nello stesso vol.); Dingeldey, *Ueber Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt* (Math. Ann., 27, 1886) e *Zur Construction der Hesse'schen Curve der rationalen Curven dritter Ordnung* (Id., 28, 1887); Berzolari, *Sulla curva del terzo ordine dotata di punto doppio* (Rend. Ist. Lomb., II, 25, 1892); Drasch, *Ueber einige Eigenschaften der ebenen Curven III O. mit Rückkehrpunkt* (Monatshefte, 4, 1893); Stiner, *Metrische Eigenschaften der Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt* (Ivi).

Alcune curve di terz'ordine specializzate dal punto di vista metrico furono studiate dagli antichi (serva d'esempio la cissoide di Diocle); anche alcuni moderni se ne occuparono come si apprende dagli scritti seguenti: Bjerkness, *Sur une certaine classe de courbes de troisième degré, rapportées à lignes droites qui dépendent de paramètres donnés* (Journ. f. Math., 55, 1858); Hermes, *Ueber eine gewisse Curve des dritten Grades* (Id., 97, 1884) (1); Schoute, *Bemerkung anlässlich des Aufsatzes von Herrn O. Hermes*, ecc. (Ib., 99, 1886) e Disteli, *Die Metrik der circulären ebenen Curven dritter Ordnung in Zusammenhang mit geometrischen Lehrsätzen Jacob Steiner's* (Wolf Zeitschr., 36, 1891).

Prima di abbandonare le curve piane di terzo ordine ricorderemo due esposizioni metodiche delle loro principali proprietà; sono: Durège, *Die ebenen Curven dritter Ordnung* (Leipzig, 1871) e Schröter, *Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung* (Leipzig, 1888).

12. Fra i molti studî che vennero compiuti sulle proprietà delle curve generali di quarto ordine, spetta il posto d'onore a quelle che si aggirano intorno alla distribuzione delle 28 tangenti doppie di una tale curva e che, essendo state compiute in parte applicando i risultati ottenuti intorno a funzioni trascendenti notevoli, meritano, in certa misura almeno, un posto nella storia dell'analisi. Come prime indagini sul detto argomento dovrebbero considerarsi quelle di Plücker (*Theorie der alg. Curven,* 1839, p. 228 e segg.), ove parecchie delle proposizioni che ne compendiano i risultati non fossero erronee, perchè ottenute col mezzo di una enumerazione di costanti non conclusiva. Meglio è dunque farle cominciare con la memoria

(1) Cfr. Steiner in Journ. f. Math., 45, 1853, p. 375.

di Steiner intitolata *Eigenschaften der Curven vierten Grades rücksichtlich ihrer Doppeltangenten* (Journ. f. Math., 49, 1855) e la contemporanea di essa di Hesse *Ueber die Doppeltangenten der Curven vierten Grades* (Id., ib.). Con questa fanno sistema due altre di quest'ultimo autore: *Transformation der Gleichung der Curven 14ten Grades, welche eine gegebene Curve 4ten Grades in den Berührungspunkten ihrer Doppeltangenten schneiden* (Id., 52, 1856) e *Zu den Doppeltangenten der Curven vierten Grades* (Id., 55, 1858).

A dimostrare le proposizioni enunciate da Steiner, ad aggiungerne altre o a stabilire altrimenti i teoremi di Hesse lavorarono il Geiser adoperando la geometria a tre dimensioni (*Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades*, Math. Ann., 1, 1869; *Ueber die Steiner'schen Sätze von den Doppeltangenten der Curven vierten Grades,* Journ. f. Math., 72, 1870) (1), l'Ameseder (*Geometrische Untersuchungen der ebenen Curven vierten Ordnung, insbesondere ihrer Berührungskegelschnitte,* Wiener Ber., 85, 1882 e 87, 1883) ed il Kohn (*Ueber die Berührungskegelschnitte und Doppeltangenten der allgemeinen Curve vierten Ordnung,* Journ. f. Math., 107, 1890; *Ueber die Relationen, welche zwischen den verschiedenen Systemen von Berührungskegelschnitten einer allgemeinen Curve vierter Ordnung bestehen,* Monatshefte, 1, 1890) con mezzi planimetrici; con procedimenti analitici (algebrici o trascendenti) oppure con metodi misti l'Aronhold (*Ueber den gegenseitigen Zusammenhang der 28 Doppeltangenten einer allgemeinen Curve vierten Grades*, Berliner Ber., 1864), il Roch (*Ueber die Doppeltangenten an Curven vierter Ordnung,* Journ. f. Math., 66, 1866), il Riemann (*Zur Theorie der Abel'schen Functionen für den Fall* $p = 3$, in *Ges. Math. Werke*, Leipzig, 1876), il Cayley (*Note sur l'algorithme des tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre,* Journ. f. Math., 68, 1868; *On the Bitangents of a Plane Quartic,* Id., 94, 1883; e *On the Double Tangents of a Curve of the Fourth Order,* Phil. Trans., 151, 1861), il Nöther (*Ueber die Gleichung achten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Curven vierter Ordnung,* Math. Ann., 15, 1879; *Zur Theorie der Berührungscurven der ebenen Curven vierter Ordnung,* Münchener Abh.,

---

(1) Cfr.: Frahm, *Bemerkungen über des Flächennetz zweiter Ordnung* (Math. Ann., 7, 1874) e Toeplitz, *Ueber ein Flächennetz zweiter Ordnung* (Ib., 11, 1873).

17, 1889, e *Note über die Siebensysteme von Kegelschnitten, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung gehen*, Math. Ann., 46, 1895), il Freyberg (*Die Gleichung für die Berührungspunkte der Doppeltangenten der Curve 4. Ordnung*, Id., 17, 1880), H. Weber (*Ueber die Galois'schen Gruppen der Gleichung 28ten Grades, von welcher die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung abhängen*, Id., 23, 1884) ed il Frobenius (*Ueber die Beziehungen zwischen den 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung*, Journ. f. Math., 99, 1886, e *Ueber den Jacobischen Covarianten der Systeme von Berührungskegelschnitten einer Curve vierter Ordnung*, Id., 103, 1888).

Incomparabilmente meno estese e profonde sono le nostre cognizioni intorno alla distribuzione dei flessi delle curve di quart'ordine; la configurazione cui essi dànno luogo fu scopo di lunghe e perseveranti indagini da parte del Caporali, il quale però non giunse a risultati decisivi; a tali investigazioni siamo debitori di una nota *Sopra una certa curva del 4° ordine* (1) (Napoli Rend., 21, 1882), di alcuni frammenti postumi *Sulla teoria delle curve piane del quarto ordine* pubblicati nelle *Memorie di Geometria* (Napoli, 1888) e di altri *aperçus* fatti conoscere dal Segre nella nota concernente *Alcune idee di Ettore Caporali intorno alle quartiche piane* (Ann. di Mat., II, 20, 1892): aggiungiamo che *L'equazione di 24° grado da cui dipende la ricerca dei flessi nella curva generale di 4° ordine* è stata studiata da F. Gerbaldi (Palermo Rend., 7, 1893).

Una *Énumeration des courbes du quatrième ordre, d'après la nature différente de leurs branches infinies*, fu fatta da Plücker (Journ. de Math., 1, 1836). Di proprietà comuni a tutte le quartiche trattarono sinteticamente Grassmann (*Erzeugung der Curven vierter Ordnung durch Bewegung gerader Linien*, Journ. f. Math., 44, 1852), Chasles (*Sur les courbes du quatrième et du troisième*

(1) Questa curva, benchè speciale, è esente da punti multipli; come tale è analoga a due studiate una dal Lüroth (*Einige Eigenschaften einer gewissen Gattung von Curven vierter Ordnung*, Math. Ann., 1, 1869, e *Neuer Beweis des Satzes, dass nicht jeder Curve vierter Ordnung ein Fünfseit eingeschrieben werden kann*, Id., 13, 1878) e l'altra dal Geiser (*Sopra la teoria delle curve piane di quarto grado*, Ann. di Mat., II, 9, 1879): quest'ultima curva gode la proprietà di avere per Hessiana una curva con punto doppio.

ordre. Développement des conséquences du théorème général concernant la description des courbes du quatrième ordre au moyen de deux faisceaux de coniques, C. R., 37, 1853), il de Jonquières (*Mode de construction et de description de la courbe du quatrième ordre determinée par quatorze points*, Journ. de Math., II, 1, 1856), il Milinowski (*Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven vierter Ordnung*, Zeitschr. f. Math., 23, 1878) e J. Cardinaal (*Zur Geometrischen Theorie der ebenen Curven vierter Ordnung*, Journ. f. Math., 102, 1888). Con altri metodi studiarono le quartiche piane: Hesse (*Ueber Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Curven vierter Ordnung*, Journ. f. Math., 49, 1855), Clebsch (*Ueber Curven vierten Grades*, Id., 59, 1861; cfr. Ciani, *Sopra due curve invariantive di una quartica piana*, Ann. di Mat., II, 20, 1892-93, *Sopra le serie quadratiche di coniche inviluppanti la quartica piana*, Rend. Ist. Lomb., II, 28, 1895, e *Sopra la corrispondenza polare fra coniche inviluppo e coniche luogo stabilita da una quartica piana*, Lincei Rend., V, 5, 1895_2), il Laguerre (*Sur les singularités des courbes de quatrième classe*, Journ. de Math., III, 1, 1875), il Le Paige (*Sur les courbes du quatrième ordre*, C. R., 98, 1884; e *Sur quelques questions relatives aux quartiques planes*, Ann. de la Soc. sc. de Bruxelles, 8, 1884), J. De Vries (*Involutions cubiques sur les courbes biquadratiques*, Archives Néerlandaises, 23, 1889); e E. Pascal (*Sulle 315 coniche coordinate alla curva piana generale di 4° ordine*, Lincei Rend., V, 1, 1892_2, *Ricerche sugli aggruppamenti formati colle 315 coniche coordinate alla curva piana generale di 4° ordine*, Ivi, e *Sugli aggruppamenti tripli di coniche coordinate alla quartica piana*, Id., 2, 1893_1).

Tacendo dei lavori che trattano delle proprietà invariantive delle forme ternarie biquadratiche. perchè sono di diretta pertinenza dell'algebra moderna, ci occuperemo delle memorie riferentisi alle quartiche particolari.

Alle quartiche di genere 2 (con un punto doppio od una cuspide) sono dedicate le seguenti: Brioschi, *Les tangentes doubles à une courbe du quatrième ordre avec un point double* (Math. Ann., 4, 1871); Cremona, *Observations géométriques à propos de la note de M. Brioschi* (Ivi); Brill, *Note über die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt* (Id., 6, 1873) e *Ueber die Wendepunkte der Curven vierter Ordnung mit Doppelpunkten*

(Id., 17, 1880); Brioschi, *Sopra una classe di curve del 4° ordine* (Lincei Rend., III, 8, 1884) (1); Björling, *Construction mittelst Lineals und Cirkel der Curven vierter Ordnung vom Geschlechte 2* (Stockh. Oefv., 1887); Bobek, *Ueber Curven vierter Ordnung von Geschlechte Zwei, ihre Systheme berührender Kegelschnitte und Doppeltangenten* (Wiener Abh., 53, 1887).

Le quartiche di genere 1 possono studiarsi facilmente riguardandole per proiezioni di quartiche gobbe di prima specie: in tal modo esse furono considerate dal Fiedler (*Die darstellende Geometrie,* III Aufl., II Thl., Leipzig, 1885, p. 180 e seg.) e dallo Zeuthen (*Nogle Egenskaber ved Kurver af fjerde Orden med to Dobbelspunkter*, Bull. de l'Acad. danoise des Sciences. 1879); mentre l'Humbert le studiò esprimendone le coordinate mediante funzioni ellittiche di un parametro (*Sur la courbe du 4e ordre à deux points doubles,* C. R., 97, 1883).

Assai più copiosa è la letteratura sulle quartiche razionali, le quali somministrarono delle eleganti applicazioni alla teoria delle forme binarie; fra gli scritti di tale categoria ricorderemo i seguenti: Brill, *Ueber rationale Curven vierter Ordnung* (Math. Ann., 12, 1877), Nagel, *Bestimmung der Doppelpunkte einer rationalen Curve vierter Ordnung* (Id., 19, 1882), R. A. Robert, *On certain Conics connected with a Plane Unicursal Quartic* e *Notes on the Plane Unicursal Quartic* (Proc. L. M. S., 16, 1884), Le Paige, *Sur les courbes de la quatrième classe à trois tangentes doubles* (Prager Ber., 1884), W. Stahl (1846-1893) (2), *Ueber die rationale ebene Curve vierter Ordnung* (Journ. f. Math., 101, 1887 e 104, 1889), G. Kohn, *Zur Theorie der rationalen Curven vierter Ordnung* (Wiener Ber., 95, 1887), Fr. Meyer, *Zur algebraischen Erzeugung sämmtlicher, auch der zerfallenden ebenen rationalen Curven vierter Ordnung* (Math. Ann., 31, 1888), E. Meyer, *Die rationalen ebenen Curven 4r Ordnung und die binäre Form 6r Ordnung* (Diss. Königsberg, 1888) e W. Binder, *Ueber das System der Tangentialpunkte einer unicursalen Plancurve vierter Ordnung* (Zeitschr. f. Math., 34, 1889). Ad essi può unirsi la memoria di

---

(1) Le curve ivi studiate sono rappresentate in coordinate omogenee da equazioni della forma seguente: $x^3_2 x_3 + x^3_3 x_1 + x^3_1 x_2 = 0$.

(2) Reye, *Wilhelm Stahl* (Journ. f. Math., 114).

Cayley, *On the mechanical Description of certain Quartic Curves by a modifiel oval Chuck* (Proc. L. M. S., 4, 1871-73). Pure razionali sono le curve a cui sono consacrati i lavori seguenti: Laguerre, *Sur les courbes du quatrième degré qui ont trois points doubles à inflexion, et en particulier sur la lemniscate* (Nouv. Ann., II, 17, 1878), Schoute, *Ueber die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten* (Arch. der Math., II, 2 e 3, 1885, 4, 1886, 6, 1888), Beyel, *Die Curven vierter Ordnung mit drei doppelten Inflexionsknoten* (Zeitschr. f. Math., 30, 1885), e *Ueber die Curven IV Ordnung mit einem doppelten Berührungsknoten und einem Doppelpunkt* (Wolf Zeitschr., 31, 1886), e Balitrand, *Sur les courbes du quatrième ordre qui ont trois points doubles à inflexion* (Mathésis, II, 3, 1893).

A queste curve specializzate dal punto di vista della geometria proiettiva, ne fanno riscontro altre godenti di particolarità metriche e che furono variamente studiate in parecchi scritti (1), di cui ci limitiamo a ricordare i seguenti: Chasles, *Aperçu hist.* (1837), note XXI; Hart, *An Account of some Transformation of Curves* (Cambridge Journ., 8, 1853), Siebeck, *Ueber einer Gattung von Curven vierten Grades welche mit den elliptischen Functionem zusammenhängen* (Journ. f. Math., 57, 1860, e 59, 1861); Sylvester, Cayley e Crofton in *Educational Times*, 1866; Crofton, *On certain Properties of the Cartesians Ovals* (Proc. L. M. S., 1, 1866), La Gournerie, *Mémoire sur les lignes spiriques* (Journ. de Math., II, 14, 1868), Casey (1820-1891), *On bicircular Quartics* (Dublin Trans., 24, 1869), Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Paris, 1873), Crone, *Elementärgeometriske Beviser for nogle Sätninger vedrörende bicirkuläre Kurve af 4ᵉ Orden* (Tidsskrift, IV, 3, 1879), G. Loria, *Remarques sur la géométrie analytiquè des cercles du plan et sur son application à la théorie des courbes bicirculaires du 4ᵉ ordre* (Quart. Journ., 22, 1887), O. Richter, *Ueber die Systeme derjenigen Kegelschnitte, die eine bicirculare Curve vierter Ordnung viermal berühren* (Zeitschr. f. Math., 35, 1890).

Ma fra le particolari curve di quart'ordine nessuna gode di tante proprietà eleganti, nessuna fu scopo di tante acute inve-

---

(1) Una era conosciuta dagli antichi: la concoide di Nicomede.

stigazioni, nessuna interviene in così svariate questioni, nessuna è suscettibile di tante generazioni differenti quanto l'ipocicloide tricuspide su cui Steiner attirò l'attenzione del mondo dei geometri con la breve nota *Ueber eine besondere Curve dritter Klasse (und vierter Ordnung)* (Journ. f. Math., 53, 1857). A provare la verità delle proposizioni enunciate dal grande geometra tedesco ed aggiungerne delle nuove o a studiare le figure collineari alla curva anzidetta sono dedicati gli scritti seguenti (1): Schröter, *Ueber die Erzeugnisse krummer projectivischer Gebilde* (Journ. f. Math., 54, 1857), Cremona, *Sur l'hypocicloïde à trois rebroussements* (Id., 64, 1865), Clebsch, *Note zu vorstehenden Abhandlung* (Ivi), Battaglini, *Sopra una curva di 3ª classe e 4º ordine* (Giorn. di Mat., 4, 1866), Siebeck, *Ueber die Erzeugung der Curven dritter Klasse und vierter Ordnung durch Bewegung eines Punktes* (Journ. f. Math., 66, 1866), Eckhardt, *Einige Sätze über Epicycloide und Hypocycloide* (Zeitschr. f. Math., 15, 1870), Painvin, *Note sur l'hypocicloïde à trois rebroussements* (Nouv. Ann., II, 9, 1870), Kiepert, *Ueber Epicycloiden, Hypocycloiden und daraus abgeleitete Curven* (Zeitschr. f. Math., 17, 1872), Frahm, *Ueber die Erzeugung der Curven 3er Classe und 4er Ordnung* (Id., 18, 1873), Milinowski, *Ueber die Steiner'sche Hypocycloide mit drei Rückkelnpunkte* (Id., 19, 1874), Laguerre, *Extrait d'une lettre adressée à M. Bourget* (Ivi), *Sur la courbe enveloppée par les axes des coniques qui passent par quatre points donnés,* ecc. (Id., 18, 1879), e *Sur quelques propriétés de l'hypocicloïde à trois points de rebroussement* (Bull. S. M. F., 7, 1879), S. Kantor, *Die Tangentengeometrie an der Steiner'schen Hypocicloide* (Wiener Ber., 1878) e *Quelques théorèmes nouveaux sur l'hypocicloïde à trois rebroussements* (Bull. Sc. math., II, 3, 1879), Mac Mahon, *The tree-cusped Hypocycloid* (Mess., II, 12, 1883), C. Intrigila, *Studio geometrico dell'ipocicloide tricuspide* (Giorn. di Mat., 23, 1883) e R. A. Roberts, *On Polygons circumscribed about a Tricuspidal Quartic* (Proc. L. M. S. 14, 1883).

---

(1) Non figura in questo gruppo la bella memoria del Padula, *Intorno alle curve di quarto grado che hanno tre punti di regresso di prima specie* (Tortolini Ann., 3, 1852 e Napoli Mem., 1, 1856) essendo essa indipendente da quella di Steiner.

13. La teoria delle curve di 5° ordine (e così dicasi per gli ordini più elevati) è ancora tutta da fare; soltanto per la classe più semplice di esse venne indicato un modo di generazione (v.: Rohn, *Eine einfache lineare Construction der ebenen rationalen Curven fünfter Ordnung*, Math. Ann., 25, 1885, e Eberle, *Ueber rationale Curven fünfter Ordnung, insbesondere derjenigen vierter und fünfter Klasse,* München, 1892); mentre per quelle generali si è cominciato a trattare analiticamente la questione delle tangenti doppie (Maisano, *Gleichung der Curve, welche die Berührungspunkte der doppelten Tangenten der allg. Curve des fünften Grades ausschneidet,* Math. Ann., 29, 1887) e delle ellittiche J. de Vries espose delle eleganti proprietà (*Ueber Curven fünfter Ordnung mit vier Doppelpunkten,* Wiener Ber., 104, 1895; cfr. anche le note dello stesso autore *Ueber eine gewisse Gruppe ebener Curve,* Amsterdam Akad. Wetens. Versl., 1894-95). Noi quindi, dopo avere ricordati alcuni studî del Cayley, *On the mechanical Description of certain Sextic Curves* (Proc. L. M. S., 4, 1871-73), abbandoneremo le curve piane d'ordine particolare per rivolgere la nostra attenzione a quelle di genere particolare.

Cominceremo da quelle di genere zero, caratterizzate geometricamente dal possedere il massimo numero di punti doppî e cuspidi e analiticamente dall'essere le coordinate dei loro punti esprimibili con funzioni razionali di un parametro, ed il cui posto notevole nella geometria venne avvertito, indipendentemente l'uno da gli altri e con considerazioni differenti, sin dal 1827 da Möbius nel *Barycentrischer Kalkül,* poi da Clebsch nella memoria *Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind* (Journ. f. Math., 64, 1864) e da Chasles nelle due note *Sur les courbes dont les points se déterminent individuellement* (C. R., 62, 1862). Fra coloro che in seguito si occuparono di curve razionali meritano un posto speciale prima Em. Weyr — pei molteplici lavori che scrisse su di esse e di cui citeremo i seguenti: *Ueber algebraische Curven, deren Punkte sich mit einer Variabeln in eindeutige Beziehung setzen lassen* (Zeitschr. f. Math., 16, 1871); *Ueber die Singularitäten der zweiten Ordnung bei rationalen ebenen Curven* (Prager Ber., 1872), *Ueber rationale Curven* (Ivi); *Ueber Punktsysteme auf rationalen Curven* (Id., 1873 e 1874), *Lineale Erzeugung der Curve n^{ter} Ordnung mit einem* (n — 1)*-fachen Punkt und der*

Curve n^{ter} *Klasse mit einer* (n — 1)-*fachen Tangente* (Id., 1874); *Beiträge zur Curvenlehre* (Wien, 1880) — e poi Fr. Meyer per l'opera intitolata *Apolarität und rationale Curven* (Tübingen, 1883).

Bisogna poi nominare qui le altre memorie: Haase, *Zur Theorie der ebenen Curven* n^{ter} *Ordnung mit* $\frac{1}{2}$ (n — 1) (n — 2) *Doppel- und Rückkerpunkten* (Math. Ann., 2, 1870), Lüroth, *Beweis eines Satzes über rationale Curven* (Id., 9, 1876), Garbieri, *Nuovo teorema algebrico e sua speciale applicazione ad una maniera di studiare le curve razionali* (Giorn. di Mat., 16, 1878), Beltrami, *Ricerche di geometria analitica* (Bologna Mem., III, 10, 1879), Pasch, *Ueber die rationalen Curven* (Math. Ann., 18, 1881), R. A. Roberts, *On Unicursal Curves* (Proc. L. M. S., 17, 1885), Weltzien, *Zur Theorie der Doppelpunkt und Doppeltangenten der ebenen rationalen Curven* (Math. Ann., 26, 1886), Schoute, *Sur la construction de courbes unicursales par points et tangentes* (Archives Néerlandaises, 20, 1886), Gross, *Ueber die Combinanten binärer Formensysteme, welche ebenen rationalen Curven zugeordnet sind* (Id., 32, 1888), de Jonquières, *Construction géométrique de courbes unicursales, notamment de celle de 5ᵉ ordre douée de six points doubles* (Palermo Rend., 2, 1888), W. Stahl, *Ueber die Fundamentalinvolutionen auf rationale Curven* (Journ. f. Math., 104, 1889) e *Zur Erzeugung der ebenen rationalen Curven* (Math. Ann., 38, 1891). Noteremo da ultimo le interessanti ricerche del Bertini *Sulle curve razionali per le quali si possono assegnare arbitrariamente i punti multipli* (Giorn. di Mat., 15, 1877), e del Darboux *Sur une classe de courbes unicursales et sur une propriété du cercle* (Ann. de l'Éc. norm., III, 7, 1890) destinate a mettere in luce alcune proprietà metriche comuni a tutte le curve di classe *n* aventi la retta all'infinito per tangente (n — 1) - pla.

14. Le curve di cui nel n. prec. ci occupammo hanno comune con le curve (ellittiche, ossia) di genere 1 e con queste soltanto la proprietà di ammettere infinite trasformazioni univoche in sè stesse: è questa un'importante proposizione scoperta e dimostrata da H. A. Schwarz nella memoria *Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen Grössen, welche eine Schaar rationaler, eindeutig umkehrbarer Transformationen*

in sich selbst zulassen (Journ. f. Math., 87, 1879; cfr. Hettner, *Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen welche eine Schaar rationaler eindeutig umkerbarer Transformationen in sich zulassen,* Götting. Nachr., 1880, Nöther, *Note über die algebraische Curven welche eine Schaar eindeutiger Transformationen in sich zulassen,* Math. Ann., 20, 1882, e *Nachtrag,* Id., 21, 1883, e Picard, *Sur les transformations birationnelles des courbes algébriques en elles-mêmes;* Bull. S. M. F., 21, 1893). Tolto questo punto di contatto, le curve ellittiche godono di proprietà specifiche affatto differenti da quelle possedute dalle curve razionali e che furono studiate da molti autori; fra questi spicca il Clebsch per la famosa memoria *Ueber diejenigen Curven deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen* (Journ. f. Math., 64, 1865; cfr. anche *Sur une propriété des courbes d'ordre* n *à* $\frac{1}{2}$ n (n — 3) *points doubles,* C. R., 1865), il Brioschi per le ricerche *Sulla equazione che dà i punti di flesso delle curve ellittiche* (Rend. Ist. Lomb., II, 2, 1869), il Cayley per la nota, *On bicursal Curves* (Proc. L. M. S., 4, 1871-73), l'Humbert per quella *Sur les courbes de genre un* (C. R., 97, 1883), il Bertini per la scoperta di *Una nuova proprietà delle curve d'ordine* n *con un punto* (n — 2)-*plo* (Lincei Rend., III, 1, 1877) la quale suggerì al Caporali alcune notevolissime osservazioni *Sulle tangenti condotte ad una curva algebrica piana da un suo punto multiplo* (Napoli Rend., 20, 1881), Em. Weyr per le note *Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf den Curven vom Geschlechte Eins* (Wiener Ber., 1883), *Ueber Vervollständigung von Involutionen auf Trägern von Geschlechte Eins und über Steiner'sche Polygone* (Id., 1892), *Ueber abgeleitete* J^n_{n-1} *auf Trägern vom Geschlechte Eins* (Ivi) e *Ueber einen symbolischen Calcul auf Trägern vom Geschlechte Eins und seine Anwendung* (Id., 1894), O. Schlesinger per la sua memoria *Ueber elliptische Curven in der Ebene* (Math. Ann., 33 e 34, 1889), C. Segre pei due lavori *Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles-mêmes* (Math. Ann., 27, 1886) e *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche* (Torino Atti, 24, 1889), G. Castelnuovo per la sua *Geometria sulle curve ellittiche* (Ivi), e S. Kantor per la nota intorno a *Les correspondances dans les courbes elliptiques, déduites géométriquement* (Id., 29, 1894).

Delle curve iperellittiche si occuparono il Brill (*Ueber diejenigen Curven, deren Coordinate, sich als hyperelliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen,* Journ. f. Math., 65, 1866), il Cremona (*Sulla trasformazione delle curve iperellittiche,* Rend. Ist. Lomb., II, 2, 1869), il Clebsch (*Ueber die Curven, für welche die Classe der zugehörigen Abel'schen Functionen* p = 2 *ist,* Math. Ann., 1, 1869), il Bobek (*Ueber hyperelliptischen Curven* Wiener Ber., 93, 1886; 94, 1887, Math. Ann., 29, 1887; cfr. anche *Ueber Dreischarcurven,* Wiener Ber., 98, 1889), il Küpper (*Hyperelliptische* C^{3n}. *Hierzu ein Anhang von* K. Robek, Prager Abh., 7, 1887, e S. Kantor (*Sur les courbes hyperelliptiques portant des correspondances univoques,* Palermo Rend., 9, 1895).

15. Chiuderemo questa rassegna delle varie direzioni in cui procedettero le indagini intorno alle proprietà delle curve piane accennando ad alcune categorie di curve definite da proprietà speciali, categorie che non sempre includono esclusivamente curve algebriche come le classi fino ad ora considerate. Non ci arresteremo alle caustiche ed alle podarie che per ricordare, riguardo alle prime, le investigazioni istituite su di esse da C. Sturm (*Recherches sur les caustiques,* Ann. de Math., 15, 1824-25) e A. Quetelet (1796-1874) (*Mémoire sur une nouvelle manière de considérer les caustiques,* Brux. Mém., 3, 1826; v. anche 4 e 5), e più recentemente dal Cayley (*A Memoir upon Caustics*, Phil. Trans., 147, 1856, e *A supplementary Memoir upon Caustics,* Id., 157, 1867; cfr. *On a Property of the Caustic by Refraction of the Circle,* Phil. Mag., 6, 1853), e da Em. Weyr (*Ueber die Identität der Brennlinien mit den Fusspunktcurven,* Zeitschr. f. Math., 14, 1867), la *Construction des Krümmungskreises für Fusspunktcurven* (Wiener Ber., 1869) dello stesso autore, e, riguardo alle seconde, la determinazione delle caratteristiche plückeriane delle podarie successive (positive e negative) di una curva algebrica compiuta da A. Rosen (*Om fotpunktkurvers karakterer,* Doctordissertation, Lund 1884). Ci piace ricordare qui ancora lo studio fatto da Haton de la Goupillière delle evolute successive (*Mémoire sur les centres successifs de courbure des lignes planes,* Journ. de Math., II, 4, 1858), e la determinazione dovuta al Binet (*Remarque sur une courbe qui est sa propre développée,* ecc., Id., 6, 1841) e dal Puiseux (*Problèmes sur les développées et les dévelop-*

pantes des courbes planes, Id., 9, 1844), delle curve che sono eguali o simili alle loro evolute; i risultati così ottenuti sono estensioni delle elegantissime proprietà che Giacomo Bernoulli (1654-1705) avvertì per primo nella spirale logaritmica. A tali curve si possono avvicinare quelle con cui A. Serret (1819-1885) rappresentò gl'integrali euleriani di 2ª specie (*Note sur les intégrales eulériennes de seconde espèce,* Journ. de Math., 7, 1842), le quali godono della proprietà seguente: Il luogo delle proiezioni dei centri di curvatura sopra i raggi vettori è una curva simile alla curva primitiva.

D'altronde la teoria delle funzioni ellittiche condusse H. J. S. Smith a considerare certe curve (*On the Singularities of the Modular Equations and Curves,* Proc. L. M. S., 9, 1878), che fissarono più tardi l'attenzione del Cayley (v. *A Memoir on the Transformation of Elliptic Functions,* Phil. Trans., 164, 1874). A questo poi si deve un interessante lavoro *On Polyzomal Curves, otherwise the Curves* $\sqrt{U} + \sqrt{V} + etc. = o$ (Cambridge Trans., 25, 1868), ed a Klein e Lie un'elegante memoria *Ueber diejenigen ebenen Curven welche durch ein geschlossenes Systhem von einfäch unendlichvielen vertauschbaren Transformationen in sich übergehen* (Math. Ann., 4, 1871) (1), il cui significato dipende in parte dal rappresentare il primo passo che il Lie mosse in una strada ch'egli doveva percorrere raccogliendo larga messe di risultati e di gloria.

Al Fouret siamo poi debitori di uno scritto *Sur les courbes planes, ou surfaces, qui sont leurs propres polaires réciproques, par rapport à une infinité de coniques ou surfaces du second ordre* (Bull. Soc. Phil., VII, 1, 1878), ed al Weltzien di uno *Zur Theorie derjenigen ebenen Curven, deren Coordinaten sich rational und ganz durch zwei lineare Functionen und zwei Quadratwurzeln aus ganzen Functionen eines Parameters sich darstellen lassen* (Math. Ann., 30, 1887), colla quale egli ascese il primo gradino verso un campo di ricerche che sembra ubertosissimo. Da ultimo

---

(1) Queste curve furono incontrate già prima dal Battaglini nelle sue ricerche *Sulle involuzioni dei diversi ordini nei sistemi di seconda specie* (Napoli Atti, 2, 1865) e poi dal Clebsch e Gordan nel loro ben noto studio *Ueber biternäre Formen mit contragredienten Variabeln* (Math. Ann., 1, 1869).

non vanno dimenticate le curve piane triangolari (analoghe alle curve sghembe tetraedriche) il cui studio fu intrapreso dal Lamé e poi proseguito dal de la Gournerie in un capitolo delle sue *Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques* (Paris, 1867), dal Jamet (*Sur les surface et les courbes tetraédrales symétriques,* Ann. Éc. norm., III, 4, 1887) e dal Fouret (*Sur le rayon de courbure des courbes triangulaires et des courbes tétraédrales symétriques,* Bull. S. M. F., 20, 1892).

E qui ci arrestiamo attratti da altre ricerche dotate di più decisiva importanza, molte delle quali, è bene notarlo, sono generalizzazioni di quelle ora discorse.

CAPITOLO III.

Teoria delle superficie algebriche.

1. Lo spirito di generalizzazione che informa le ricerche geometriche dopo che esse subirono più o meno palesemente l'influenza dell'analisi, spinse gli scienziati a cercare nello spazio delle proposizioni analoghe a quelle che aveva rivelato lo studio della geometria piana; ond'è che la teoria generale delle superficie segue da presso quella delle curve piane ed ha pertanto delle origini moderne. Essa può dirsi abbia un secolo e mezzo di vita, giacchè ci sembra che l'appendice alla seconda parte dell'*Introductio in analysin infinitorum* (Lausannae, 1748) di Eulero sia il primo scritto in cui si trovi applicata l'idea del Parent (Cap. I, n. 11), di rappresentare una superficie col mezzo di un'equazione fra le tre coordinate cartesiane di un punto dello spazio; ivi di più è dimostrato quanto convenga lo studiare le sezioni piane di una superficie a chi voglia conoscerne la natura e quanto riesca utile la trasformazione delle coordinate per raggiungere il medesimo intento, il tutto illustrato coll'applicazione alle superficie di secondo ordine.

Lo sviluppo ulteriore che la teoria delle superficie ricevette dopo Eulero manifestò nei cultori di essa due tendenze distinte: quelli che seguirono l'una si occuparono delle proposizioni in cui il concetto d'infinito o d'infinitesimo non rappresenta di regola una parte fondamentale; gli altri invece studiarono esclusivamente le proprietà infinitesimali delle superficie; fra gli uni come fra gli altri vi sono dei geometri puri, come vi sono di quelli che metodicamente usufruirono dell'aiuto offerto dalla analisi; dei secondi ci occuperemo nel Cap. V, appunto dedicato alla Geometria differenziale, dei primi nel Cap. attuale, ed entreremo in materia avvertendo come chi voglia oggi imparare questa parte della geometria abbia a propria disposi-

zione due eccellenti trattati, cioè il *Treatise on Analytic Geometry of three Dimensions* del Salmon (di cui esistono edizioni parecchie e traduzioni in tedesco ed in francese) ed i *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie* del Cremona (Bologna Mem., II, 6 e 7; tradotta in tedesco da M. Curtze, Berlin 1870) (1); riguardo a queste due opere noteremo che la prima per metodo di esposizione può dirsi informata ad un ben inteso eclettismo, benchè nell'autore sia indiscutibile una tendenza verso i procedimenti analitici, la seconda invece è preponderantemente sintetica, come lo è l'*Introduzione a una teoria geometrica delle curve piane* (v. Cap. II, n. 10) dello stesso autore, della quale è un naturale proseguimento; l'esporre con metodo geometrico puro la teoria che ci occupa è compito riserbato ai geometri dell'avvenire.

2. I teoremi generali che oggi si conoscono intorno alle superficie algebriche non sono così numerosi come quelli noti per le curve piane algebriche e che noi citammo nei n. 1 e 2 del capitolo precedente; fra essi basterà qui ricordare le relazioni scoperte da Plücker (*Recherches sur les surfaces algébriques de tous les degrés,* Journ. de Math., 19, 1828, e *Théorèmes généraux concernant les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'inconnues,* Journ. f. Math., 16, 1836) (2) e Jacobi (v. la memoria citata nel Cap. II, n. 4) fra i punti d'intersezione di tre superficie, le quali furono il punto di partenza delle investigazioni del Reye intorno a *Die algebraischen Flächen, ihre Durchdringungscurven, Schnittpunkte und projectivische Erzeugung* (Math. Ann., 2, 1870), e le proposizioni ottenute applicando la teoria delle funzioni algebriche, fra cui vi è l'*Extension du théorème de Riemann-Roch aux surfaces algébriques* (C. R., 103, 1886) scoperta dal Nöther.

Più larga fu la messe raccolta dai geometri che si occuparono dei punti singolari delle superficie; fra i lavori che trattano

(1) Una terza è da sperarsi verrà presto ad arricchire la letteratura matematica, il 2° volume cioè delle *Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch,* del quale il Lindemann ha già pubblicato una prima parte (Leipzig, 1891).

(2) Alcune inesattezze ivi contenute furono rettificate dal Schönflies a p. 607-610 della edizione da lui curata e da noi già citata delle *Opere* di Plücker.

generalmente dei punti d'una superficie per qualche ragione degni di tal nome scegliamo i seguenti: Umpfenbach, *Von den vielfachen Punkten einer krummen Fläche* (Journ. f. Math., 28, 1844), Amiot, *Sur les points singuliers des surfaces* (Belgique Mém., 21, 1846) (1), Cayley, *On the Singularities of Surfaces* (Cambridge Journ., 7, 1852), de Jonquières, *Étude sur les singularités des surfaces algébriques* (Nouv. Ann., 23, 1863), Halphen, *Sur les lignes singulières des surfaces algébriques* (Ann. di Mat., II, 2, 1879) — memoria singolarmente importante —, Rohn *Ueber die Entstehung eines beliebigen* k-*fachen Punktes einer Fläche aus dem gewöhnlichen* k-*fachen Punkte* (Leipziger Ber., 1884), del Pezzo, *Intorno ai punti singolari delle superficie algebriche* (Palermo Rend., 6, 1892) e G. Kobb, *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (Journ. de Math., IV, 8, 1893) e *Sur un point de la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (Bull. S. M. F., 21, 1893).

Vertono invece su le proprietà di alcuni punti speciali gli scritti: Cayley, *On a Singularity of Surfaces* (Quart. Journ., 9, 1868; sono ivi considerati i “ pinch-points ”, cioè quei punti della linea doppia d'una superficie in cui i due relativi piani tangenti di questa coincidono), e *On the Flecnodal Places of a Surface* (Id., 15, 1877; è ivi trattato di quei punti di una superficie in cui la sezione col relativo piano tangente presenta una inflessione), Zeuthen, *Recherches des singularités qui ont rapport à une droite multiple* (Math. Ann., 4, 1871), et *Sur une classe de points singuliers des surfaces* (Id., 9, 1876; sono ivi studiati i “ pinch-points ” di Cayley), Rohn, *Ein Beitrag zur Theorie der biplanaren und uniplanaren Knotenpunkte* (Id., 22, 1883), Korteweg, *Ueber Faltenpunkte* (Wiener Ber., 98, 1889), *Sur les points de plissement* (Archives Néerlandaises, 24, 1889) e *La théorie générale des plis et la surface* ψ *de van der Waals dans les cas de symétrie* (Ivi) (2).

---

(1) Memoria scritta per rispondere ad una questione proposta dall'Accademia del Belgio e da questa premiata.

(2) In questi scritti del Korteweg sono studiati i punti di contatto di quei piani bitangenti i cui punti di contatto coincidono, punti i quali sono in certo modo analoghi ai punti d'inflessione delle curve piane, giacchè questi sono punti di contatto di tangenti doppie i cui due punti di contatto coincidono; la sezione della superficie con uno di tali piani bitangenti presenta nel relativo punto di contatto un contatto di due rami.

Si possono riavvicinare a queste la *Recherche des points à l'infini sur les surfaces algébriques* (Journ. f. Math., 65, 1866) del Painvin e le indagini del Rohn intorno a *Das Verhalten der Hessé'schen Flächen in den vielfachen Punkten und vielfachen Curven einer gegebenen Fläche* (Math. Ann., 23, 1884) (1).

Oltre al determinare quali siano le singolarità da ritenersi per ordinarie in una superficie algebrica e lo studiare le proprietà di questi punti e di altri più speciali, è di grande importanza la questione di trovare delle relazioni fra i numeri dei punti singolari e dei piani singolari delle varie specie, sì da poter determinare la classe d'una data superficie o, se meglio piace, l'ordine della superficie correlativa ad una superficie data. Questo problema, al pari dei due anzidetti, non si può considerare come definitivamente risoluto, ma delle ricerche importanti su di esso vennero istituite e diedero dei risultati degni della massima considerazione; dei quali il più antico è rappresentato dal teorema di Poncelet che insegna essere $n(n-1)^2$ la classe di una superficie d'ordine n, di cui tutti i punti sono ordinarî (*Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques,* Journ. f. Math., 4, 1829; cfr. Beck, *Zur allgemeinen Theorie der Curven und Flächen,* Math. Ann., 14, 1879); esso dà origine ad una contraddizione apparente analoga a quella che nella teoria delle curve piane chiamammo " paradosso di Poncelet „ (v. Cap. II, n. 5), a togliere la quale più o meno direttamente contribuirono gli scritti seguenti: Salmon, *On the Degree of a Surface Reciprocal to a Given one* (Irish Trans., 21, 1857); Cayley, *On the Theory of Reciprocal Surfaces* (Irish Proc., 7, 1862), *A Memoir on the Theory of Reciprocal Surfaces* (Phil. Trans., 159, 1869), e *On the Theory of Reciprocal Surfaces* (appendice alla 4ª ed., Dublin 1882, del *Treatise on the analytic geometry of three dimensions* del Salmon, riprodotta nel sesto vol. dei *Collected Papers*); Zeuthen, *Note sur la théorie des surfaces réciproques* (Math. Ann., 4, 1871) e *Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques* (Id., 10, 1876) — memorie queste di altissimo valore —; e Fouret, *Sur le nombre des plans tangents que l'on peut mener à une surface algébrique par une droite multiple de cette surface* (Palermo Rend., 8, 1894).

---

(1) Cfr. anche la nota del Segre citata nel n. 9 del I Cap.

3. Queste investigazioni sono fra loro affini e connesse a quelle aventi per intento la determinazione d'un numero invariabile per trasformazioni univoche analogo al genere delle curve e il cui punto di partenza è la nota di Clebsch *Sur les surfaces algébriques* (C. R., 67, 1868); nella quale è definito come " genere superficiale „ (*Flächengeschlecht*) d'una superficie d'ordine n dotata soltanto di linee doppie e di regresso il numero p delle superficie d'ordine $n-4$ linearmente indipendenti che si possono far passare per tutte le linee singolari della superficie data (sono queste le così dette " superficie aggiunte „). Una dimostrazione dei teoremi enunciati da Clebsch, nonchè una definizione trascendente di p conducente a una estensione della nozione di genere a superficie dotate di singolarità qualunque, anzi a varietà a quante si vogliano dimensioni, si apprendono dall'importante memoria di Nöther *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen* (Math. Ann., 2, 1876; cfr. *Zur Theorie der algebraischen Functionen mehrerer complexen Variabeln,* Götting. Nachr. 1869); dell'influenza esercitata sul genere dai punti multipli delle superficie si occupò lo stesso Nöther in uno scritto posteriore, *Ueber die algebraischen Functionen einer und zweier Variabeln* (Götting. Nachr., 1871); egli poi, essendo stato avvertito che l'eguaglianza del genere è condizione necessaria ma non sufficiente per la trasformabilità d'una superficie in un'altra, stabilì *Zwei neue Kriterien des eindeutigen Entsprechens algebraischer Flächen* (Götting. Nachr., 1873), dando così posto stabile nella geometria al " Curvengeschlecht „ di una superficie, cioè al genere delle curve in cui questa è tagliata dalle superficie aggiunte. Notisi che per calcolare il genere p di una superficie d'ordine n bisognerebbe saper determinare il numero dei coefficienti arbitrarî che entrano nell'equazione generale delle superficie d'ordine $n-4$ passanti colle molteplicità volute per le linee multiple ed i punti multipli della superficie data: orbene, dati che siano questi elementi, si può trovare una tale formola per una superficie d'ordine m abbastanza grande, ma s'ignora qual sia il valore di m al disopra del quale la formola è applicabile, sicchè è possibile che facendo ivi $m=n-4$ si trovi pel genere un valore diverso da quello p corrispondente alla definizione trascendente; questo fatto — segnalato dal Cayley — mena alla considerazione di un genere *geometrico*

e di uno *numerico* che talora (ad esempio per le rigate) non coincidono, di cui il primo è sempre positivo, mentre il secondo può essere negativo (v. ad es. Nöther, *Ueber eine Fläche sechster Ordnung von Flächengeschlecht — 1,* Math. Ann., 21, 1883). Degli sviluppi e degl'importanti complementi a questi lavori sono il tema di scritti dello Zeuthen (*Sur les points fondamentaux de deux surfaces dont les points se correspondent un à un,* C. R., 70, 1870; *Études géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent un à un,* Math. Ann., 4, 1871), del Cayley (*On the Transformation of certain Surfaces,* Id., 3, 1871; *On the Deficiency of Certain Surfaces,* Ivi), del Nöther (*Sulle curve multiple delle superficie algebriche,* Ann. di Mat., II, 5, 1871-73), del Picard (*Sur un nombre invariant dans la théorie des surfaces algébriques,* C. R., 116, 1893) e del Castelnuovo (*Intorno alla geometria sopra una superficie algebrica,* Rend. Ist. Lomb., II, 24, 1891).

Queste nozioni permisero al Picard di estendere allo spazio un teorema di Schwarz che già conosciamo (v. Cap. II, n. 14), di mostrare cioè che soltanto le superficie di genere 0 o 1 ammettono una schiera doppiamente infinita di trasformazioni univoche in sè stesse (*Sur la transformation des surfaces algébriques en elles-mêmes*; C. R., 103, 1886); in tal caso le coordinate dei punti della superficie sono esprimibili mediante funzioni abeliane di due parametri: lo notò il Poincaré (*Sur les transformations des surfaces en elles-mêmes;* cfr. Picard, *Sur un théorème relatif aux surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres,* Math. Ann., 19, 1882).

Alle questioni relative ai *moduli di una superficie algebrica* (cfr. la nozione analoga per le curve piane nel n. 8 del Cap. II), si riferisce la breve ma fondamentale memoria del Nöther, *Anzahl der Moduln einer Klasse algebraischer Flächen* (Berliner Ber., 1888).

4. Tutte le rette che toccano una superficie in un punto stanno in un piano che è il relativo *piano tangente;* questo, come notò il Bedetti (?-1845) (*De plano tangente,* Nov. Comm. Bonon., 5, 1842), taglia la superficie in una curva che possiede un punto doppio nel relativo punto di contatto e, generalmente

parlando, altri punti singolari soltanto nelle intersezioni di quel piano con le linee singolari delle superficie: vi è però una semplice infinità di piani *bi*tangenti ed un numero finito di piani *tri*tangenti, quelli dànno luogo ad una sviluppabile che fu studiata dal Bischoff (*Ueber den Grad der abwickelbaren Fläche, die einer Fläche m'er Ordnung doppelt umschrieben ist,* Journ. f. Math., 57, 1860), mentre la determinazione del numero di questi si legge nelle *Études* del de Jonquières citate nel n. 2 del presente Cap.

Similmente: per ogni punto della superficie passano due tangenti notevoli in quanto hanno con la superficie un contatto di secondo ordine (sono le *tangenti principali,* i cui inviluppi sono le *linee asintotiche* delle superficie); ma esiste una curva luogo di punti, in ognuno dei quali la superficie ammette una tangente quadripunta, di essa trattarono Clebsch nelle due memorie *Zur Theorie der algebraischen Flächen* (Journ. f. Math., 68, 1861, e 63, 1864), e Voss nello scritto sopra *Die Curve vierpunktiger Berührung auf einer algebraischen Fläche* (Math. Ann., 19, 1876), mentre le questioni relative alle tangenti singolari in genere furono metodicamente studiate da H. Schubert nel lavoro *Tangentensingularitäten der allgemeinen Ordnungsfläche* (Math. Ann., 11, 1877) e più tardi dal Krey in una memoria *Ueber singuläre Tangenten algebraischer Flächen* (Id., 15, 1879).

Ricorderemo ancor qui le ricerche sui contatti delle superficie di cui siam debitori a Plücker (*Ueber die allgemeinen Gesetze, nach welchen irgend zwei Flächen einen Contakt der verschiedenen Ordnungen haben* (Journ. f. Math., 4, 1829), a Chasles (*Théorèmes sur les contacts des lignes et des surfaces courbes,* Journ. de Math., 2, 1837), al Moutard (v. una nota inserita nel secondo vol. delle *Applications d'analyse et de géométrie* di Poncelet, Paris 1864) e all'Halphen (*Sur le contact des surfaces,* Bull. S. M. F., 3, 1876, e *Sur un point de la théorie du contact,* Id., 2, 1875); altre ricerche analoghe più complicate verranno nominate a proposito della geometria numerativa (Cap. IX, n. 4).

5. Passando ad un altro ordine di idee, vanno menzionate le ricerche aventi per iscopo la costruzione o la generazione delle superficie algebriche d'ordine qualunque, fra cui spiccano quelle di Grassmann (*Allgemeiner Satz über die lineale Erzeugung aller*

algebraischen Oberflächen, Ueber die verschiedenen Arten der linealen Erzeugung algebraischer Oberflächen, Journ. f. Math., 49, 1855), quelle di Chasles (*Deux théorèmes généraux sur les courbes et les surfaces géométriques de tous les ordres,* C. R., 1857), e di de Jonquières (*Génération des surfaces algébriques d'ordre quelconque,* C. R., 105, 1887) relative alla generazione con fasci proiettivi (cfr. anche J.-S. e M.-N. Vaněček, *Sur la génération des surfaces et des courbes gauches par les faisceaux de surfaces,* Lincei Rend. IV, 1, 1884-85, e Ann. di Mat., II, 14, 1886-87), quelle del Reye (*Projectivische Erzeugung der allgemeinen Flächen dritter, vierter und beliebiger Ordnung durch Flächenbündel niederer Ordnung,* Math. Ann., 1, 1869) e dell'Escherich (*Die reciproken linearen Flächensysteme,* Wiener Ber., 75, 1877) e *Die Construction der algebraischen Flächen aus der Anzahl der sie bestimmenden Punkte mittelst reciproker Flächenbündel,* e *Die Construction der algebraischen Flächen und Curven aus der Anzahl der sie? bestimmenden Punkten mittelst reciproker linearer Systeme höherer Stufe* (Id., 85, 1882), alle quali ultime è strettamente legato l'interessante scritto dello Schur *Ueber die Construction der Flächen m-ter Ordnung* (Math. Ann., 23, 1884).

Della teoria delle polari e della generalizzazione che ricevette nello spazio (analoga a quella che ebbe nel piano) trattarono, oltre agli scritti che citammo (Cap. II, n: 9) parlando della polarità rispetto a curve piane: Mainardi, *Su le polari delle superficie algebriche* (Atti del R. Ist. Lomb., 1, 1858), R. del Grosso *Nota su alcune generali proprietà riguardanti i poli e le superficie polari delle superficie* (Accademia Pontaniana, Rend., 7, 1859), ed il Reye (*Erweiterung der Polarentheorie algebraischer Flächen,* Journ. f. Math., 78, 1874; *Ueber die algebraische Flächen, die zu einander apolar sind,* Id., 79, 1875; *Ueber Systeme und Gewebe von algebraischen Flächen,* Id., 82, 1877).

Ad altre proprietà proiettive si riferiscono la importante memoria di Clebsch *Ueber die Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche, insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung* (Id., 59, 1861), i *Beiträge* del Voss *zur Theorie der algebraischen Flächen* (I, *Zur Theorie der Steiner'schen Kernflächen,* Math. Ann., 27, 1886; II, *Ueber die zu zwei eindeutig auf einander bezogenen Flächen gehörigen Strahlensysteme,* Id., 30, 1887), le ricerche del medesimo autore *Ueber die projective Centralfläche einer algebraischen Fläche*

n^{ter} *Ordnung* (Münchener Abh., 16, 1887), quelle del Moutard consacrate alla *Détermination du degré de l'équation de certaines surfaces enveloppes* (Nouv. Ann., 19, 1860), finalmente la *Note* del Cayley *on a Theorem relating to Surfaces* (Phil. Mag., 25, 1863).

Invece alle proprietà metriche sono dedicate, oltre alcune delle memorie citate nel n. 2 del Cap. II (1), le ricerche sulle normali inaugurate dal Terquem (*Sur le nombre de normales qu'on peut mener par un point donné à une surface algébrique,* Journ. de Math., 4, 1839) e da Steiner (*Ueber àlgebraische Curven und Flächen,* Journ. f. Math., 49, 1855), e proseguite con successo da R. Sturm (*Ueber Normalen an algebraischen Flächen,* Math. Ann., 7, 1874, *Zur Theorie der algebraischen Flächen,* Id., 9, 1876), nonchè quelle del Fouret *Sur le nombre des normales communes à deux courbes, à deux surfaces, à une courbe et une surface* (Bull. S. M. F., 6, 1878; cfr. anche Rindi, *Sulle normali comuni a due superficie,* Palermo Rend., 5, 1891), di R. Sturm *Ueber Fusspunkt-Curven und Flächen, Normalen und Normalebenen* (Math. Ann., 6, 1873), del Pieri *Sulle normali doppie di una superficie algebrica* (Lincei Rend., IV, 2, 1886_2), e del Darboux *Sur la surface des centres de courbure d'une surface algébrique,* C. R., 70, 1870), inoltre quelle di L. Marcks (*Bestimmung der Ordnung und Classe der Krümmungsmittelpunktsfläche einer Fläche* n-*ter Ordnung,* Math. Ann., 5, 1872), del Roberts (*On Parallel Surfaces* e *Note on Normals and the Surface of Centres of an algebraical Surface,* Proc. L. M. S., 4, 1873), di C. Neumann (*Sul baricentro di curvatura delle superficie algebriche,* Ann. di Mat., II, 1, 1868), di S. Rindi (*Les surfaces polaires inclinées,* Bull. Sc. math., II, 9, 1885, e *Alcune proprietà delle superficie e dei sistemi di superficie,* Giorn. di Mat., 24, 1886), e del Voss (*Zur Untersuchung der Fläche der Centra,* Math. Ann., 16, 1880); di quest' ultimo va ancora ricordata l'esatta determinazione del numero degli ombelichi di una superficie (*Ueber die Zahl der Kreispunkte einer*

---

(1) Noto in esse il teorema " il centro delle medie distanze dei punti di contatto di una superficie con i suoi piani tangenti paralleli ad una data giacitura, non dipende da questa giacitura " (reso noto da Chasles prima nel *Mémoire sur la transformation parabolique des relations métriques des figures*, Correspondance mathématique, 6, 1830; e poi *Ap. hist.*, 2e éd., Paris, 1875, p. 624) e commentato dal Liouville in una memoria che già menzionammo nel l. c.

allgemeinen Fläche n^{ter} *Ordnung,* Math. Ann., 9, 1876), questione importante che il Berzolari di recente estese nella nota *Sopra un problema che comprende quello di trovare il numero degli ombelichi di una superficie generale d'ordine* (Torino Atti, 30, 1895) (1).

Finiremo richiamando l'attenzione del lettore sui lavori intorno ai sistemi lineari di superficie, non senza osservare dapprima che il numero esiguo di essi non corrisponde all'importanza del tema che trattano, ma probabilmente ne rispecchia le difficoltà; sono, oltre quello già citato (Cap. II, n. 9) del Doehlemann, quelli del Pieri, *Sui sistemi lineari di coni* (Riv. di Mat., 3, 1893) e *Sui sistemi lineari di monoidi* (Giorn. di Mat., 31, 1893) e quelli dell'Enriques, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche* (Lincei Rend., V, 2, 1893_2), e *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche* (Id., 3, 1894_1; v. anche Math. Ann., 46, 1895). Per affinità di tema nomineremo qui le due recenti memorie di End, *Algebraische Untersuchungen über Flächen mit gemeinschaftlicher Kurve* (Math. Ann., 35, 1890) e Guccia, *Sur les points doubles d'un faisceau de surfaces algébriques* (C. R., 120, 1895).

6. Compiuta così la sommaria esposizione delle ricerche intraprese intorno alle proprietà generali delle superficie algebriche ed osservato come l'insieme dei risultati ottenuti, per quanto considerevole, non può dirsi di quelli in cui il desiderio si acqueta, passiamo a dir qualche cosa degli studî che vennero fatti intorno alle superficie di ordine determinato o che sono specializzate per qualche proprietà comune.

Anzitutto ci si presentano le superficie di secondo ordine. Di queste gli antichi conoscevano tutte le rotonde, ad eccezione dell'iperboloide ad una falda (v. specialmente i due libri di Archimede *Sopra i conoidi e gli sferoidi*), il quale venne segnalato da Wren (1632-1723) nella memoria intitolata *Generatio corporis cylindroidis hyperbolici, elaborandis lentibus hyperbolici accomodati* (Phil. Trans., 1669) e poi dal Parent in una nota *Sur les surfaces courbes égales en surface courbe et en solidité* (Mém. de Paris 1709, stampati nel 1733), la quale fu il punto di par-

---

(1) Si tratta qui di stabilire quanti punti di una superficie godano la proprietà che le relative tangenti principali incontrino una data curva algebrica.

tenza di numerosi studi da parte dei discepoli di N. Fergola (1). Il primo accenno alle quàdriche in generale si trova, per quanto ci consta, nel *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan* (Paris, 1639) di Desargues, ove questo autore, dopo di avere esposto i teoremi fondamentali delle polarità rispetto ad una sfera, osserva: " Et semblables propriétés se trouvent à l'égard d'autres solides qui sont relativement à la sphère, ce que les coniques sont au cercle " (*Œuvres de Desargues,* 1, p. 291). La verità di questa asserzione venne dimostrata assai più tardi da Monge e dai suoi discepoli, ai quali si può dire che la teoria delle superficie di second'ordine deve la propria esistenza. A provarlo osserveremo come nella Scuola politecnica le varie specie di quàdriche abbiano ricevuto i nomi (diversi da quelli da Eulero suggeriti nella tante volte citata *Introductio* ed a vero dire mediocremente felici!) che dovevano poi conservare; che è nel secondo volume della Corr. Éc. pol. (Paris, 1813) che Chasles fece conoscere la doppia generazione, mediante il movimento di una retta, dell'iperboloide ad una falda, la conoscenza della quale si diffuse poi grazie agli *Élémens de géométrie à trois dimensions* dell'Hachette (Paris 1817), ove inoltre s'impara la generabilità di tutte le quàdriche, tranne i paraboloidi iperbolici, mediante un circolo mobile (2); inoltre già prima il Livet (1783-1812) (3) nello stabilire le *Formules pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un système de coordonnées obliques* (Journ. Éc. pol., 13e cah., 1806) ed il Binet (1786-1856) nel compiere alcune ricerche *Sur les trois axes rectangulaires des surfaces du second degré qui ont un centre* (Corr. Éc. pol., 2, 1809-1813) avevano incontrati i teoremi per le quàdriche analoghi a quelli di Apollonio per le coniche (4); ed il Brianchon in un *Mémoire sur les surfaces courbes du second degré* (Journ. Éc. pol., 13e cah., 1806) dimostrava essere

---

(1) Cfr. G. Loria, *Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce* (Genova 1892), p. 55-61.

(2) Questa proprietà, nota agli antichi pel cono (v. il I libro delle *Coniche* di Apollonio), venne estesa all'ellissoide dal d'Alembert (*Opuscules mathématiques*, 7, Paris 1767).

(3) Livet — che dal 1809 fu a Varsavia professore nella Scuola di artiglieria e d'ingegneria — introdusse la geometria descrittiva in Polonia.

(4) Cfr. Staudt, *Von den reellen und imaginären Halbmessern der Kurven und Flächen II Ordnung* (Nürnberg, 1867).

una quàdrica la figura polare reciproca di una quàdrica; poco dopo Dupin in un *Essai sur la description des lignes et des surfaces du second degré* (Id., 14e cah., 1808) generalizzava in due modi allo spazio il teorema che dice: " quando un segmento di lunghezza costante scorre coi suoi estremi su due rette di un piano, ogni punto di esso o del suo prolungamento descrive un'ellisse. A Monge dobbiamo poi la conoscenza della sfera luogo dei vertici dei triedri trirettangoli le cui faccie toccano una quadrica (v. *Des surfaces du second degré,* Corr. Éc. pol., 2, 1809-13) e a Bobillier quella del luogo dei vertici dei triedri trirettangoli i cui spigoli sono tangenti di una tale superficie (*Recherche de quelques lieux géométriques dans l'espace,* Ann. de Mat., 18, 1827-28). Altre proposizioni intorno alle superficie di second'ordine furono indicate da Chasles (1), il quale in particolare si propose e riuscì a trovare degli analoghi rispetto alle quàdriche pei teoremi di Pascal e Brianchon (*Aperçu hist.*, note 32) e per la teoria dei fuochi (Ivi, note 31): va notato che quest'ultima questione fu studiata, indipendentemente da Chasles, da B. Amiot (2) e, pel caso di coni quàdrici, molto tempo prima dal Magnus in una memoria che fa parte del volume decimosesto delle Ann. de Math. (1826). A cominciare da questo momento la teoria delle linee focali delle superficie di second'ordine e quelle delle quàdriche omofocali fu studiata in varî modi in molti scritti, fra cui ricorderemo: Plücker, *Sur la réflexion de la lumière, dans le cas des surfaces du second degré, analogue à celle qui aux foyers des sections coniques a donné le nom* (Journ. f. Math., 35, 1847); Chasles, *Résumé d'une théorie des surfaces du second ordre homofocales* (C. R., 50, 1860, oppure Journ. de Math., II, 5, 1860) e Heilermann, *Ueber die Fokalpunkte der Flächen zweiten Grades* (Journ. f. Math., 56, 1859).

A queste si possono riavvicinare le numerose ricerche che, a partire da Monge (*Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoïde,* Journ. Éc. pol., 1, 1794; cfr. Cremona, *Sulle linee di curvatura delle superficie di secondo grado,* Bologna Mem.,

(1) *Théorèmes sur le paradoloïde hyperbolique et l'hyperboloïde à une nappe* (Corr. math., 11, 1839); *Propriétés nouvelles de l'hyperboloïde à une nappe* (Journ. de Math., 1839); *Théorèmes sur les surfaces du second degré* (Id., 8, 1843).

(2) *Mémoire sur une nouvelle méthode de génération et de discussion des surfaces du deuxième ordre* (Journ. de Math., 8, 1843); *Mémoire sur diverses propriétés des surfaces du deuxième ordre déduites de la théorie des focales* (Id., 10, 1845).

III, 1, 1871), vennero fatte sulle linee di curvatura delle quàdriche, poi su le geodetiche ed altre curve: i molti punti di contatto esistenti fra tutti questi temi ci inducono a citare qui insieme i lavori che vi si riferiscono: Jacobi, *Auszug aus einem Schreiben an Herrn Steiner* (Journ. f. Math., 12, 1834) e *Geometrische Theoreme* (Id., 73, 1871; cfr. Hermes, *Die Jacobi'sche Erzeugungsweise der Flächen zweiten Grades*, Ivi); Mac-Cullagh (1809-1847), *On the Surfaces of the Second Order* (Irish. Proc., 2, 1843) e *Note on Surfaces of the Second Order* (Id., 3, 1847); Townsend, *On a principle in the Theory of Surface of the second Order and its Application to M. Jacobi's Method of generating the Ellipsoid* (Cambridge Journ., 3, 1848) e *On a Theorem in Confocal Surfaces of the second Order* (Id., 5, 1850); Chasles, *Sur les lignes geodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second degré, Nouvelle démonstration de deux équations relatives aux tangentes communes à deux surfaces du second ordre homofocales et propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de ces surfaces* (Journ. de Math., 11, 1846); Liouville, *Démonstration géométrique relative à l'équation des lignes géodésiques sur les surfaces du second ordre* (Ivi) e *Expression simple du rayon de courbure géodésique d'une ligne tracée sur un ellipsoïde* (Id., 19, 1854); M. Roberts, *Sur quelques propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de l'ellipsoïde* (Id., 11, 1846), *Nouvelles propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de l'ellipsoïde* (Id., 13, 1848), *Mémoire sur la géométrie des courbes tracées sur la surface d'un ellipsoïde* (Id., 15, 1850), *Sur l'application du théorème d'Abel à la comparaison des lignes de courbure d'un ellipsoïde* (Ann. di Mat., II, 2, 1868-69), *Sur les lignes de courbure d'un ellipsoïde* (Ivi) e *Sur la rectification des lignes de courbure d'un ellipsoïde* (Id., II, 5, 1871-73); Staude, *Ueber Fadenconstruction des Ellipsoides* (Math. Ann., 20, 1882), *Ueber geodätische Bogenstücke von algebraischen Längendifferenz auf dem Ellipsoid* (Ivi), *Ueber geodätische Polygone auf den Flächen zweiten Grades* (Id., 21, 1883), *Geometrische Deutung der Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale und Functionen erster Ordnung in System der confocalen Flächen zweiten Grades* (Id., 22, 1883), *Ueber neue Focaleigenschaften des Flächen zweiten Grades*, e *Eine katoptrische Eigenschaft der Ellipsoids* (Id., 27, 1886); Finsterwalder, *Ueber die Fadenconstruction des Ellipsoides* (Id., 26, 1886).

Al pari di questi lavori sono di indole metrica i seguenti intorno alle normali delle quàdriche: Joachimsthal, *De aequationibus quarti et sexti gradus quae in theoria linearum et superficierum secundi gradus occurrunt* (Journ. f. Math., 53, 1857); Clebsch, *Ueber das Problem der Normalen bei Curven und Oberflächen des zweiten Grades* (Id., 62, 1863) e Geiser, *Sulle normali all'ellissoide* (Ann. di Mat., II, 1, 1867-68).

Nel campo projettivo si aggirano per converso le memorabili ricerche di Hesse, *Ueber Oberflächen zweiter Ordnung* (Journ. f. Math., 18, 1838) e *De curvis et superficiebus secundi ordinis* (Id., 20, 1840); al medesimo geometra dobbiamo anche degli studî *Ueber die lineäre Construction des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiter Ordnung, wenn sieben Schnittpunkte derselben gegeben sind* (Id., 26, 1843; v. anche dello stesso autore: *Note über die acht Schnittpunkte dreier Oberfläche zweiter Ordnung,* Id., 72, 1871, e *Ueber Sechsecke im Raume,* Id., 85, 1878 (1)), che vennero completati o proseguiti da F. Caspary (*Zur Construction des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiter Ordnung,* Id., 99, 1886), da H. Schröter (*Construction des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiter Ordnung, von denen sieben gemeinschaftliche Punkte willkürlich und unabhängig von einander gegeben sind,* Ivi, e *Ueber die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung,* Acta, 14, 1890), da R. Sturm (*Ueber den achten Schnittpunkt dreier Fläche zweiter Ordnung,* Journ. f. Math., 99, 1886), da H. G. Zeuthen (*Construction du huitième point commun aux surfaces du second ordre qui passent par sept points donnés,* Ivi), da T. Reye (*Lineare Construction des achten Schnittpunktes von drei Flächen zweiter Ordnung,* Id., 100, 1887), dal Dobriner (*Ueber das räumliche Achteck, welche die Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung bilden,* Acta, 12, 1889), e dallo Zeuthen (*Note sur les trois points d'intersection de trois surfaces du second ordre* (Ivi).

Aggiungiamo che molte belle pagine della *Geometrie der Lage* dello Staudt e dei seguenti *Beiträge* si riferiscono alle superficie di cui ci stiamo occupando (2).

---

(1) Cfr. altresì le *Recherches nouvelles sur les sections du cône et sur les hexagones inscrits et circonscrits à ces sections* (Ann. de Math., 15, 1824-25) del Dandelin (1794-1847).

(2) A queste pagine sono ispirate le *Untersuchungen über das raumliche Polarsystem* (Breslau, 1868) di G. Beyer.

Alla geometria costruttiva appartengono eziandio le indagini di F. Seydewitz (1807-1852) (*Leichtfassliche Construction einer Fläche des zweiten Grades von welcher neun Punkte beliebig gegeben sind,* Arch. der Math., 17, 1851), di Chasles (*Principe de correspondance entre deux objets variables qui peut être d'un grand usage en géométrie*, C. R., 41, 1855; cfr. Heger, *Zur Construction einer Flächen zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten*, Zeitschr. f. Math., 25, 1880), dello Schröter (*Problematis geometrici ad superficiem secundi ordinis per data puncta construendam spectantis solutio nova,* Journ. f. Math., 62, 1863) e di Steiner (*Construction der Fläche zweiten Grades durch neun Punkte,* Id., 68, 1868), del Thomae (*Lineare Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neuen Punkten,* Leipziger Ber., 44, 1892), del Ravier (*Construction du dixième point d'une quadrique,* Nouv. Ann., III, 11, 1892) e del Rohn (*Die Construction der Fläche zweiten Grades durch neun gegebene Punkte,* Leipziger Ber., 1894), sulla costruzione della quadrica determinata da nove punti; altrettanto dicasi delle memorie di Picquet: *Solutions de quelques problèmes relatifs aux surfaces du second ordre* (Journ. f. Math., 73, 1871), *Sur trois problèmes fondamentaux relatifs aux surfaces du second ordre* (Id., 99, 1886) e *Nouvelle contribution au problème du huitième point commun à trois quadratiques* (Bull. S. M. F., 22, 1894), di quelle dello Sturm, *Das Problem der Projectivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades* (Math. Ann., 1, 1869), del London, *Ueber constructive Probleme aus der Theorie der reciproken Verwandschaft und der Flächen 2ter Ordnung* (Id., 38, 1891) e del Cardinaal, *Application des principes de la géométrie synthétique à la solution des problèmes de la géométrie descriptive* (Annales de l'Éc. pol. de Delft, 3, 1888).

A Plücker appartiene una breve nota *Ueber eine neue mechanische Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung und Classe* (Journ. f. Math., 34, 1847), mentre la generazione delle quàdriche mediante stelle reciproche è un ritrovato del Seydewitz, come appare dall'articolo intitolato *Construction und Classification der Flächen zweiten Grades mittelst projectivischen Gebilde* (Arch. der Math., 9, 1847).

Di alcuni poligoni collegati alle superficie di second'ordine parlano: Battaglini, *Iscrivere in una superficie di 2° grado un*

poligono, in modo che i lati passino per punti dati (Tortolini Ann., 2, 1851); Zeuthen, *Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre* (Math. Ann., 18, 1881 e 26, 1886); G. Bruno (1828-1893), *Sui quadrilateri sghembi circoscritti ad una quadrica* (Torino Atti, 17, 1881); Voss, *Ueber Polygone welche einem Gebilde zweiten Grades umschrieben sind* (Math. Ann., 26, 1885) e *Ueber Poncelet-Zeuthen'schen Polygone welche einem Gebilde zweiten Grades eingeschrieben sind* (Id., 27, 1886); Campbell (*On the shortest Path consisting of straight Lines between two Points on a ruled Quadric*, Mess., 23, 1893-94). Più antiche sono le osservazioni intorno alle curve situate sopra una quàdrica fatte da Chasles (*Théorie analytique des courbes à double courbure de tous les ordres tracées sur l'hyperboloïde à une nappe*, C. R., 53, 1861) e Cremona (*Courbes gauches décrites sur la surface d'un hyperboloïde à une nappe*, Ivi).

Di sistemi infiniti di quàdriche trattarono, oltre lo Staudt (nei suoi *Beiträge*) e il Reye (in una serie di lavori compendiati poi in *Die Geometrie der Lage*): Cayley, *On the Cones which pass through a given Curve of the Third Order* (Phil. Mag., 12, 1856); H. Müller (*Der Flächenbüschel zweiter Ordnung in synthetische Behandlung*, Math. Ann., 1, 1869); R. Sturm (*Untersuchungen über das Flächennetz zweiter Ordnung*, Journ. f. Math., 70, 1869); E. D'Ovidio, *Teoremi sui sistemi di superficie di secondo grado* (Torino Atti, 14, 1879); e Cardinaal, *Ueber einen besonderen Fall des F^2-Gebüsches und das dazu projectivische räumliche System* (Journ. f. Math., 111, 1893). Invece a certi sistemi finiti si riferiscono le due note: Montesano, *Su certi gruppi di superficie di secondo grado* (Ann. di Mat., II, 14, 1886-87), e Kober, *Zur Gruppe der acht harmonisch zugeordneten Flächen zweiten Grades* (Math. Ann., 33, 1889 e 40, 1892). Ad altri guida la ricerca delle quàdriche rispetto a cui due date sono polari reciproche alla quale sono consacrate le memorie seguenti: E. D'Ovidio, *Sulle linee e superficie di second'ordine* (Giorn. di Mat., 10, 1872), G. Battaglini, *Nota intorno alla quadrica rispetto alla quale due quadriche date sono polari reciproche* (Lincei Atti, 25, 1872) e H. Thieme, *Ueber die Flächen II Grades, für welche zwei Fläche zweiten Grades zu einander polar sind* (Diss. Breslau, 1877); mentre alle proprietà delle quàdriche autopolari rispetto ad un'altra sono dedicate la nota di R. Sturm, *Ueber Flächen zweiten Grades welche zu sich selbst polar sind* (Math.

Ann., 25, 1885) e l'altra di P. Del Pezzo, *Sulle quadriche polari reciproche di sè stesse rispetto ad un'altra* (Napoli Rend., 24, 1885).

Altre proposizioni valide per tutte le superficie di secondo grado si apprendono dai lavori seguenti: Brassine, *Sur quelques propriétés des courbes et des surfaces du second degré* (Journ. de Math., 7, 1842); Cremona, *Sulle coniche e le superficie di secondo ordine congiunte* (Ann. di Mat., 3, 1860); Méray, *Mémoire sur la théorie géométrique des surfaces du second ordre* (Ivi); Rosanes, *Bemerkungen zur Theorie der Flächen zweiter Ordnung* (Math. Ann., 23, 1884); e in molti scritti di P. Serret, fra cui sceglieremo l'articolo intitolato *De quelques propositions réciproques relatives à la théorie des courbes et des surfaces du second degré* (Journ. de Math., II, 6, 1861) e l'opera *Géométrie de direction* (Paris, 1869).

Una quàdrica non può specializzarsi projettivamente se non degenerando in un cono o in una conica; ma dal punto di vista della geometria metrica essa può offrire delle particolarizzazioni che vennero più volte studiate. Tacendo dei coni che presentano delle particolarità metriche, i quali sono stati considerati da Binet (Corr. Éc. pol., 2, 1809-1813), da Steiner (Journ. f. Math., 2, 1827) e più recentemente da Th. Meyer (*Ueber die Kegel des Pappus und des Hachette*, Diss. Strassburg, 1884); e limitandoci per le quàdriche di rivoluzione a ricordare l'interessante lavoro del Schonflies, *Ueber diejenigen Flächen zweiten Grades, welche durch gleichwinkelige reciproke Strahlenbündel erzeugt werden* (Journ. f. Math., 99, 1886); rileveremo nella *Systematische Entwickelung* la presenza del " paraboloide iperbolico equilatero " (v. Schönflies, *Ueber das gleiseitige hyperbolische Paraboloid und ein aus ihm abgeleitetes Strahlensystem* Zeitschr. f. Math., 23, 1878), nella memoria del Vogt, *Ueber ein besonderes Hyperboloid* (Journ. f. Math., 86, 1879) uno studio metodico dell' " iperboloide equilatero " (di cui già Hesse e Joachimsthal avevano parlato in memorie dianzi ricordate), mentre all' " iperboloide ortogonale " — che dopo essere stato studiato da Chasles sin dal 1836 nella memoria intitolata *Analogie entre des propositions de géométrie plane et de géométrie à trois dimensions* (Journ. de Math., 1) soltanto ai dì nostri ricevette dallo Schröter il nome che porta attualmente — sono consacrati gli scritti seguenti: Schönflies, *Synthetisch-geometrische Untersuchungen über Flächen II Grades* (Diss. Berlin, 1877) e *Ueber ein*

specielles Hyperboloid und andere mit ihm zusammenhängende Regelflächen (Zeitschr. f. Math., 23, 1878 e 24, 1879); Schröter, *Ueber ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art* (Journ. f. Math., 85, 1878); Ruth, *Ueber eine besondere Erzeugungsweise des orthogonalen Hyperboloides und über Büschel orthogonalen Kegel und Hyperboloide* (Wiener Ber., 1879).

E finiremo osservando che chi voglia apprendere la teoria delle superficie di secondo grado può ricorrere ai numerosi trattati di geometria analitica e di geometria descrittiva (fra questi ultimi emerge *Die darstellende Geometrie* del Fiedler, ricca di osservazioni originali sulle superficie di cui ci occupiamo), ai trattati sintetici già citati di Staudt e Reye ed ancora alla *Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugniss projektivischer Gebilde* (Leipzig, 1880) di H. Schröter.

7. La dottrina delle superficie di terz'ordine ebbe due sorgenti fra loro indipendenti in Inghilterra ed in Germania. Da un lato Cayley e Salmon in due memorie *On the triple Tangent Planes of Surfaces of the third Order* (Cambridge Journ., 4, 1849; cfr. Kohn, *Beweis eines Satzes von Cayley*, Monatshefte, 2, 1891) scoprivano le 27 rette ed i 45 piani tritangenti posseduti da qualsiasi superficie cubica, dall'altro Steiner in una lettura fatta all'Accademia di Berlino il 31 gennaio 1856 *Ueber die Flächen dritten Grades* (Journ. f. Math., 53, 1857), giungeva ai medesimi risultati e di più dava gli elementi per una completa teoria sintetica di queste importanti forme geometriche. Mentre i due geometri inglesi sembra non trovassero imitatori che nello Schläfli (1814-1895) — del quale citeremo pel momento la nota intitolata *An Attempt to determine the Twenty-seven Lines upon a Surface of the Third Order* (Quart. Journ., 2, 1858), ove fra l'altro è introdotta la nozione di " bisestupla " (cfr. Cayley, *On the Double-sixers of a Cubic Surface*, Id., 10, 1870, e *On D.r Wiener's Model of a Cubic Surface: and on the Construction of a Double-sixer*, Cambridge Trans, 12, I Part, 1873) — numerosissimi sono i geometri che si proposero di dimostrare prima e di completare poi le asserzioni del grande geometra tedesco. Ricorderemo anzitutto lo Schröter per la memoria dal titolo: *Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung*



(Journ. f. Math., 62, 1863) e la Diss. di R. Sturm, *De superficiebus III ord. disquisitiones syntheticae* (Breslau, 1863), e poi i due grandi lavori di Cremona e Sturm ricompensati nel 1866 col premio Steiner: il primo apparve due anni dopo sotto il titolo di *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre* (Journ. f. Math., 68, 1868), mentre il secondo formò il nucleo dell'opera *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung* (Leipzig, 1867), libro a cui serve di complemento la memoria *Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung* (Journ. f. Math., 88, 1880).

Ma nel frattempo altri due grandi geometri avevano fatto compiere dei passi importanti alla teoria che ci occupa, cioè il Grassmann coll'indicare una notevole generazione delle superficie cubiche (*Die stereometrische Gleichung dritten Grades, und die dadurch erzeugten Oberflächen,* Journ. f. Math., 49, 1855) ed il Sylvester scoprendo il celebre " pentaedro " (*On Elimination, Transformations and Canonical Forms,* Cambridge Journ., 6, 1851). Al primo tennero dietro molti scrittori (1), dei cui lavori ricorderemo i seguenti: August, *Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis* (Diss. Berlin, 1862); Affolter, *Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung* (Arch. der Math., 56, 1874); Picquet, *Sur un nouveau mode de génération des surfaces du troisième degré* (Bull. S. M. F., 4, 1876; v. anche l'articolo dello stesso autore che tratta *Des sections paraboliques et equilatères dans les surfaces du troisième degré,* Ivi); Schröter, *Lineare Constructionen zur Erzeugung der kubischen Fläche* (Journ. f. Math., 96, 1884); G. Kohn, *Ueber eine neue Erzeugungsart der Flächen dritter Ordnung* (Wiener Ber., 99, 1890), ai quali può avvicinarsi la recente memoria del Panelli, *Sulla costruzione della superficie del 3° ordine individuata da 19 punti* (Ann. di Mat., II, 22, 1894). Alla memoria del secondo fanno seguito: Gordan, *Ueber das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung* (Math. Ann., 5, 1872); Reye, *Geometrischer Beweis des Sylvester'schen Satzes " Jede quaternäre kubische Form ist darstellbar als Summe von fünf Kuben linearer Formen "* (Journ. f. Math., 78, 1874); Cremona, *Ueber die Polar-Hexaeder bei den Flächen dritter Ordnung* (Math. Ann., 13, 1878;

(1) Si trovano citati da R. Sturm in Math. Ann., 23, p. 308-310 e 599.

cfr. Caporali, *Sull'esaedro completo*, Napoli Rend., 20, 1881); Beltrami, *Sull'equazione pentaedrale della superficie di terzo ordine* (Rend. Ist. Lomb., II, 12, 1879).

La configurazione formata dalle rette di una superficie di terzo ordine e dai suoi piani tritangenti (1), specialmente in questi ultimi anni venne fatta segno di ricerche così vaste e perseveranti che meriterebbero il nome di esaurienti; i più significanti scritti che ne contengono i risultati sono: Cremona, *Sulle ventisette rette d'una superficie del terzo ordine* (Rend. Ist. Lomb., II, 3, 1870); R. Sturm, *Ueber die 27 Geraden einer kubischen Fläche* (Math. Ann., 23, 1884); E. Bertini, *Contribuzione alla teoria delle 27 rette e dei 45 piani tritangenti di una superficie di 3° ordine* (Ann. di Mat., II, 12, 1884); G. Kohn, *Ueber die Sextupel von geraden Linien, welche von sämmtlichen Punkten einer cubischen Fläche als sechs Tangenten eines Kegelschnitts gesehen werden* (Monatshefte, 2, 1891); E. Pascal, *Saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette della superficie di 3° ordine, e sui gruppi ad esso isomorfi* (Ann. di Mat., II, 20 e 21, 1892-93), *Sui poliedri circolari che si possono formare coi 45 piani tritangenti della superficie di 3° ordine; Configurazione delle 30 bisestuple gobbe formate colle 27 rette della superficie di 3° ordine* e *Configurazione delle 216 quintuple gobbe di 2ª specie formate colle 27 rette della superficie di 3° ordine* (Rend. Ist. Lomb., 25, II, 1892); P. H. Schoute, *Recherche de la position des 27 droites d'une surface cubique les unes par rapport aux autres à l'aide de la représentation sur un plan* (Amsterdam Versl., 1892-93). Come estensione delle ricerche sulle rette di una superficie cubica sono da riguardarsi quelle sulle altre curve in essa situate che si leggono nei seguenti scritti: Clebsch, *Sur la géométrie des courbes gauches tracées sur une surface générale du troisième ordre* (C. R., 62, 1866); R. Sturm, *Ueber die Curven auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung* (Math. Ann., 21, 1883); G. Humbert, *Sur un complexe remarquable de coniques et sur la surface du troisième ordre* (Journ. Éc. pol., 64, 1894); K. Rohn, *Die*

---

(1) Notiamo che questi possono definirsi come piani tangenti comuni a tre certe superficie di decima classe; lo dimostrò il Brioschi nella nota *Sopra una proprietà dei piani tritangenti ad una superficie cubica* (Lincei Rend., II, 3, 1876).

Raumcurven auf den Flächen dritter Ordnung (Leipziger Ber., 1894).

Della Hessiana d'una superficie cubica tratta la memoria di Clebsch, *Ueber die Knotenpunkte der Hesse'sche Flächen insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung* (Journ. f. Math., 59, 1861), e della intersezione di essa con la superficie fondamentale quella del Bauer, *Die Hesse'sche Determinanten der Hesse'schen Fläche einer Flächen dritter Ordnung* (Münchener Abh., 14, 1883), ove è dimostrata analiticamente la proprietà, già osservata da R. Sturm nel 1867, che consiste nell'essere l'intersezione di una superficie di 3° ordine con la propria Hessiana la curva parabolica di entrambe, proprietà questa analoga a quella a cui devono l'esistenza i fasci sizigetici di curve di terzo ordine.

Coll'aiuto della teoria delle forme le superficie cubiche sono studiate nelle memorie seguenti: Salmon, *On Quaternary Cubics* (Phil. Trans., 150, 1860); Clebsch, *Ueber eine Transformation der homogenen Functionen dritter Ordnung mit vier Varänderlichen* (Journ. f. Math., 58, 1861); De Paolis, *Ricerche sulle superficie del 3° ordine* (Lincei Mem., III, 10, 1881) e Bobek, *Die Invarianten der allgemeinen Fläche dritter Ordnung* (Wiener Ber., 103, 1894); mentre dell'applicazione ad esse superficie della teoria delle sostituzioni si occuparono il Jordan, in parecchi lavori che vennero compendiati nel grande *Traité des substitutions et des equations algébriques* (Paris, 1870), e più recentemente F. Klein nella memoria *Sur la résolution par les fonctions hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique* (Journ. de Math., IV, 4, 1888) e il Burkhardt nella nota *Zur Reduction des Problems der 27 Geraden der allgemeinen Fläche dritter Ordnung auf das Transformationsproblem der hyperelliptischen Functionen* $p = 2$ (Götting. Nachr., 1892). Invece col solo sussidio della pura geometria le superficie di 3° ordine furono studiate dal Milinowski nel lavoro *Zur Polarentheorie der Curven und Flächen dritter Ordnung* (Journ. f. Math., 89, 1880), e dal Thieme nei due: *Zur Construction des Polarsystems einer Fläche 3. Ordnung* (Math. Ann., 20, 1882) e *Die Flächen dritter Ordnung als Ordnungsfläche von Polarsystemen* (Id., 28, 1887).

Metodi varî per ottenere svariati risultati si trovano adoperati in una memoria del Geiser precedentemente citata (n. 6) e nei

seguenti scritti: Brioschi, *Intorno ad alcune proprietà delle superficie del terzo ordine* (Tortolini Ann., 6, 1855); Caporali, *Teoremi sulle superficie del 3° ordine* (Napoli Rend., 20, 1881); S. Kantor, *Ueber eine ein-dreideutige Abbildung der Flächen 3er Ordnung* (Journ. f. Math., 95, 1883); Schur, *Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung* (Ivi); Le Paige, *Sur les surfaces du troisième ordre* (Acta, 3, 1883-84 ; cfr. C. R., 97, 1883), e *Nouvelles recherches sur les surfaces du troisième ordre* (Id., 5, 1884-85, cfr. C. R., 98, 1884); Zeuthen, *Sur les pentaèdres complets inscrits à une surface cubique* (Acta, 5, 1884-85); Ciani, *Sul pentaedro completo* (Lincei Rend., 7, 1891); Ascione, *Alcune considerazioni sul pentaedro completo* (Napoli Rend., II, 6, 1892); e H. M. Taylor, *On a special Form of the General Equation of a Cubic Surface and on a Diagram representing the Twenty-seven Lines on the Surface* (Phil. Trans., 185, 1895).

Sulla classificazione delle superficie cubiche i principali lavori a noi noti sono i seguenti: Schläfli, *On the Distribution of Surfaces of the Third order into Species* (Phil. Trans., 153, 1863); Cayley, *A Memoir on Cubic Surfaces* (Id., 159, 1869); Rodenberg, *Zur Classification der Flächen dritter Ordnung* (Math. Ann., 14, 1879; cfr. anche la Diss. dello stesso autore sopra *Das Pentaeder der Fläche 3. Ordnung beim Auftreten von Singularitäten*, Göttingen, 1874), e Bobek, *Zur Klassification der Flächen dritter Ordnung* (Wiener Ber., 96, 1887).

Ad alcune speciali superficie di terzo ordine sono consacrate la *Note on the Theory of Cubic Surfaces* (Phil. Mag., 27, 1864) del Cayley, e le memorie seguenti: Clebsch, *Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen fünften Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits* (Math. Ann., 4, 1871; cfr. *Mittheilung über eine Fläche dritter Ordnung,* (1) Götting. Nachr., 1872); Eckardt, *Beiträge zur analytischen Geometrie des Raumes, insbesondere zur Theorie der Flächen 3ten Grades mit 4 Doppelpunkten und der Steinerschen Flächen, sowie zur Lehre von Raumcurven* (Math. Ann., 5, 1871) e *Ueber diejenigen Flächen dritten Grades, auf denen sich drei geraden Linien in einem Punkte*

(1) Fa ivi il suo ingresso nella scienza la notissima " superficie diagonale ".

schneiden (Id., 10, 1876); G. Kohn, *Ueber Flächen dritter Ordnung mit Knotenpunkten* (Wiener Ber., 96, 1887); E. Ciani, *Sulle superficie cubiche la cui Hessiana si spezza* (Lincei Rend., IV, 6, 1890_1), *Sulla superficie diagonale di Clebsch* (Id., 7, 1891_1), *Sopra le Hessiane delle superficie cubiche* (Rend. Ist. Lomb., II, 26, 1893) e *Sopra quelle superficie cubiche le quali si possono riguardare come parti della Hessiana di un'altra superficie cubica* (Id., 27, 1894); Ascione, *Sulle superficie di 3° ordine* (Napoli Rend., II, 6, 1893) (1). Nè si può tacere della memoria del Cremona intitolata: *Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell' esagrammo di Pascal* (Lincei Mem., III, 1, 1876-77), ove l'autore, concretando gli accenni fatti nel 1847 dal Cayley nella seconda parte della memoria *Sur quelques théorèmes de la géométrie de position* (inserita in Journ. f. Math., 31) sull' applicabilità di considerazioni stereometriche allo studio dell'esagrammo di Pascal, dedusse le più eleganti proprietà di quella celebre figura dalle note proprietà della configurazione delle rette e dei piani tritangenti di una superficie cubica con un punto doppio, deduzione che si ritrova nel più recente scritto del Richmond: *A symmetrical System of Equations of the Lines of a Cubic Surface, which has a Conical Point* (Quart. Journ., 23, 1888).

Finiremo coll'additare alcuni scritti riferentisi alle superficie di terzo ordine rigate, dopo avere notato come esse si distribuiscano in due categorie, una delle quali fu rilevata da Cayley nel 1864 (v. Phil. Trans., 154): Cayley, *On the Skew Surface of the Third Order* (Phil. Mag., 24, 1862), *On the Deelination of a Cubic Scroll* (Id., 25, 1863); Cremona, *Sulle superficie gobbe del terzo ordine* (Atti Ist. Lomb., 2, 1860) e *Sur les surfaces gauches du troisième degré* (Journ. f. Math., 60, 1862); Em. Weyr, *Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Curven und Flächen als deren Erzeugnisse* (Leipzig, 1869) e *Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zwei-deutiger Gebilde inbesondere der Regelflächen dritter Ordnung* (Id., 1870);

---

(1) Una speciale superficie cubica è il soggetto della dissertazione di J. Borgmeyer, *Geometrische Untersuchungen über den Ort des Fusspunkte der Lote, welche von einem Punkte auf die Strahlen einer linearen Congruenz gefällt werden* (Münster, 1893) ed un' altra della nota del Thieme *Ueber eine besondere Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten* (Zeitschr. f. Math, 40, 1895).

B. Klein (1846-1891), *Ueber die geradlinige Fläche dritter Ordnung und deren Abbildung auf einer Ebene* (Diss. Strassburg, 1876); Pittarelli, *Studio analitico-proiettivo delle superficie gobbe del 3° grado* (Giorn. di Mat., 32, 1894).

8. Alla ricca collezione di ricerche e di proposizioni concernenti la teoria generale delle superficie cubiche fa tristo riscontro la totale assenza di nozioni intorno alle superficie generali di quarto ordine, di cui si può dire non si sappia altro se non che il primo membro dell'equazione di una di esse in coordinate omogenee è esprimibile sempre come somma di quarte potenze di dieci forme lineari (v. Reye, *Darstellung quaternären biquadratischer Formen als Summen von zehn Biquadraten,* Journ. f. Math., 78, 1874), proposizione questa che non è stata ancora sfruttata a prò della geometria e che d'altronde non è certo sia feconda di conseguenze numerose ed importanti. Per converso molte notevoli classi di superficie di 4° ordine vennero studiate a fondo: quali siano e quali proprietà godano emergerà da quanto ora diremo (1).

Accenneremo di sfuggita alle sviluppabili circoscritte a due quadriche, che Poncelet considerò come figure polari reciproche delle quartiche gobbe di prima specie scoprendone in tal maniera sin dal 1822 alcune notevoli proprietà, e di cui in seguito si occuparono Cayley, nei due articoli *On the Developable Surfaces which arises from two Surfaces of the Second Order* (Cambridge Journ., 5, 1850) e *On a Property of the Torsus circumscribed abouth two Quadric Surfaces* (Mess., 1, 1872), e Chasles nella nota dal titolo *Propriétés de la surface développable circonscrite à deux surfaces du second ordre* (C. R., 54, 1862); aggiungeremo che dell'altra specie di sviluppabili di quart'ordine (cioè di quelle razionali), trattò il Cayley nei tre lavori: *Note on the Nodal Curve of the Developable derived from the Quartic Equation* (a, b, c, d, e $\between$ t,1)$^4 = 0$ (Phil. Mag., 27, 1864), *On certain Developable Surfaces* (Quart. Journ., 6, 1864), e *On the Reciprocation of a Quartic Developable* (Id., 7, 1866).

Più numerose ed importanti sono le nostre cognizioni intorno alle rigate di quarto grado, la cui classificazione com-

(1) Cfr. Cayley, *Sketch of Recent Researches upon Quartic and Quintic Surfaces* (Proc. L. M. S., 3, 1869-71).

pleta si apprende dai seguenti scritti (fra cui il più eminente è quello del Cremona): Chasles, *Descriptions des courbes de tous les ordres situées sur les surfaces réglées du troisième et du quatrième ordre* (C. R., 53, 1861); Cayley, *A second Memoir on skew Surfaces otherwise Scrolls* (Phil. Trans., 154, 1864), *A third Memoir, etc.* (Id., 159, 1869); Cremona, *Sulle superficie gobbe di 4° grado* (Bologna Mem., II, 8, 1868); Harnack, *Bemerkungen zur Geometrie auf den Linienflächen vierter Ordnung* (Math. Ann., 13, 1878); Rohn, *Die verschiedenen Arten der Regelflächen vierter Ordnung* (Id., 28, 1887); Cardinaal, *Meetkundige theorie der scheeve oppervlakken van de vierde orde* (Amsterdam Versl. III, 5, 1888); R. Sturm, *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung,* 1 (Leipzig, 1892), pp. 52-61; Segen, *Ueber windschiefe Flächen vierten Grades mit drei Doppelgeraden* (Journ. f. Math., 112, 1893), e Holgate, *On certain Ruled Surfaces* (Am. Journ., 15, 1893).

Alla teoria delle superficie di 4° ordine contenenti infinite rette (cioè rigate) di cui testè ci occupammo, forma un proseguimento naturale quella delle superficie dello stesso ordine contenenti infinite coniche; la loro determinazione completa venne fatta con sagacia straordinaria da Kummer (1810-1893) (1) nella memoria *Ueber die Flächen vierten Grades auf welche Schaaren von Kegelschnitten liegen* (Berliner Ber., 1863, oppure Journ. f. Math., 66, 1864). Ivi è anzitutto dimostrato non esistere alcuna superficie di 4° ordine semplice le cui sezioni prodotte da tutti i piani dello spazio o di una stella constino ciascuna di due coniche; sono poi considerati a parte i casi in cui i piani seganti la superficie in coniche sono non tangenti, tangenti semplicemente o bitangenti: nel primo caso la superficie di 4° ordine ha una conica doppia e due punti doppi, oppure una retta doppia (2), oppure ha due punti di contatto di due falde; nel secondo caso la superficie è una " su-

---

(1) Cfr. Lampe, *Nachruf für Ernst Eduard Kummer* (Deutsch. Math. — Ver., 3, 1894).

(2) Riguardo alle superficie quartiche con retta doppia si veda anche: Cayley, *On the Quartic Surfaces which are represented by the Equation, Symmetrical Determinant* = 0 (Quart. Journ., 14, 1875); J. Cardinaal, *Génération des surfaces du quatrième ordre avec une droite double à l'aide de faisceaux projectifs de quadriques* (Amsterdam Versl., 1892).

Il caso particolare in cui si abbia una " superficie del complesso „ di

perficie di Steiner „, oppure ha una conica doppia ed un punto doppio; nell'ultimo caso la superficie ρ è rigata o possiede una conica doppia. Da ciò emerge che le superficie determinate da Kummer o sono le rigate di 4° grado già discorse, o hanno una conica doppia (ed eventualmente altre singolarità), o sono superficie di Steiner, o finalmente hanno due punti di contatto di due falde. Queste ultime non furono, per quanto sappiamo, ancora studiate *ex professo,* ma le due classi precedenti furono oggetto di molteplici investigazioni, come ora diremo.

9. Le superficie di 4° ordine a conica doppia godono della notevolissima proprietà di avere la sviluppabile bitangente costituita da cinque coni quàdrici; lo rilevarono contemporaneamente Kummer nella precitata memoria e il Moutard nella *Note sur la transformation par rayons vecteurs réciproques* e nell'altra *Sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre* (Nouv. Ann., II, 3, 1864) per il caso in cui la linea doppia della superficie sia il cerchio immaginario all' infinito; di più questo geometra, assieme al Darboux, osservò (C. R., 59, 1864), che tali superficie possono formar parte di un sistema triplo ortogonale. A cominciare da questo momento le superficie di 4° ordine aventi per linea doppia il cerchio immaginario all'infinito vennero studiate a più riprese dal Darboux (i risultati da lui sono compendiati nell'opera già citata (Cap. III, n. 12) *Sur une classe remarquable* ecc.), dal Laguerre (*Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques,* e *Sur les sections circulaires des surfaces-anallagmatiques,* Bull. soc. phil., 1868), dal Casey (1820-1891) (*On Cyclides and Sphero-quartics,* Phil. Trans., 161, 1871), da G. Loria* (*Ricerche sulla geometria della sfera e loro applicazione allo studio e alla classificazione delle superficie di quarto ordine aventi per linea doppia il cerchio imaginario all'infinito,* Torino Mem., II, 36, 1884), da G. Humbert (*Sur les surfaces cyclides,* Journ. Éc. pol., 55ᵉ cah., 1885), da R. Lachlan (*On Systems of Circles and Spheres,* Phil. Trans., 177, 1886) e

---

Plücker fu studiato da Cayley (*On Plücker's Models of certains Quartic Surfaces,* Proc. L. M. S., 3, 1869-71) e F. Klein (*Ueber die Abbildung der Complexflächen vierter Ordnung und vierter Classe,* Math. Ann., 2, 1870; e *Ueber die Plücker'sche Complexfläche,* Id., 7, 1873).

W. Wolseley Johnson (*Some Theorems relating to Groups of Circles and Spheres*, Am. Journ., 14, 1892).

D' altronde le superficie di quarto ordine aventi per linea doppia una conica situata comunque nello spazio sono il tema di altri lavori, fra cui spiccano: Clebsch, *Ueber die Flächen vierter Ordnung welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen* (Journ. f. Math., 69, 1868); Geiser, *Ueber die Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen* (Id., 70, 1869); Cremona, *Sulle superficie di quarto ordine dotate di una conica doppia* (Rend. Ist. Lomb., II, 4, 1871); Zeuthen, *Om Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit* (Kopenhagen, 1879; una versione italiana se ne trova in Ann. di Mat., II, 14); C. Juel. *En geometrisk Fremstilling af Hovedegenskaber ved Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit* (Tidsskr., IV, 4, 1880); G. Veronese, *Di una costruzione della superficie del quarto ordine dotata di una conica doppia* (Atti Ist. Ven., VI, 2, 1884); C. Segre, *Étude des différentes surfaces du quatrième ordre à conique double ou cuspidale (générale ou décomposée) considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions* (Math. Ann., 24, 1884) (1); K. Bobek, *Ueber Flächen vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt* (Wiener Ber., 90, 1885); Berzolari, *Sulla superficie del quarto ordine avente una conica doppia* (Ann. di Mat., II, 13, 1885); A. Weiler, *Ueber Flächen vierter Ordnung mit Doppel- und mit Cuspidal-Kegelschnitt* (Zeitschr. f. Math., 30, 1885); Domsch, *Ueber die Darstellung der Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt durch hyperelliptische Functionem* (Diss. Leipzig, 1885); Küpper, *Ueber die Flächen dritter Ordnung und vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt, insbesondere über deren Geraden* (Zeitschr. f. Math., 34, 1889); Cardinaal, *Constructie der oppervlakken van den vierden graad met dubbelkeglesnede door middel van projectivische bundels oppervlakken van den tweeden graad* (Amsterdam Versl., III, 8, 1891); Pereno, *Alcune ricerche sul gruppo delle sostituzioni e sulla configurazione delle 16 rette delle superficie di quarto ordine a conica doppia* (Ann. di Mat., II, 21, 1893); Del Re, *Sulla superficie di 4° ordine a conica doppia* (Lincei Rend., V, 2, 1893₁).

---

(1) Questo modo di considerare le superficie in discorso si trova accennato anche nella nota testè nominata del Veronese.

I casi in cui esistano sulla superficie dei punti doppi isolati o in cui la conica doppia degeneri in una coppia di rette vennero minutamente esaminati dal Korndörfer in alcune memorie complementari a quelle precitate di Clebsch (1); altre speciali superficie dell'anzidetta specie sono studiate nelle memorie: Cayley, *On a Surface of the Fourth Order* (Phil. Mag., 21, 1861) e *Note on a Quartic Surface* (Id., 29, 1865) e Rudio, *Ueber eine specielle Fläche vierter Ordnung* (Journ. f. Math., 104, 1889); mentre della superficie di 4° ordine a conica cuspidale trattò Béla Tötossy nel bel lavoro *Ueber die Flächen vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt* (Math. Ann., 19, 1882).

Del resto le più antiche superficie di quarto ordine a conica doppia sono il toro e la ciclide di Dupin. Riguardo a quello in primo luogo noteremo che esso era noto agli antichi (2), che fin dal 1848 Yvon Villarceau (1813-1883) (3) scoperse esistere in esso, oltre ai paralleli ed ai meridiani, una terza serie di sezioni circolari (C. R., 27; cfr. Breton de Champ, *Sur les sections circulaires du tore et des surfaces de révolution algébriques d'ordre quelconque,* Nouv. Ann., 15, 1856) che il Cayley vi dedicò una nota speciale (*On the conic Torus*, Quart. Journ., 13, 1875), e che la sua definizione, convenientemente estesa, mena alle superficie che il de la Gournerie considerò nel *Mémoire sur la surface engendrée par la révolution d'une conique autour d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace* (Journ. Éc. pol., 40ᵉ cah., 1863) e nella *Note sur la surface enveloppe des positions d'une surface du second ordre qui tourne autour d'une droite* (Journ. de Math., II, 10, 1865) (4). — Riguardo alla ciclide rileveremo che Dupin la scoperse cercando le superficie di cui tutte le linee di curvature sono circolari e che egli la riconobbe

(1) *Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades und einen oder mehreren Knotenpunkten* (Math. Ann., 1, 1869, e 2, 1870); *Die Abbildung einer Flächen vierter Ordnung mit zwei sich schneidenden Doppelgeraden* (Id., 3, 1871); *Die Abbildung einer Flächen vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades, welche aus zwei sich schneidenden unendlichd nahen Geraden besteht* (Id., 4, 1871).

(2) V. la soluzione del problema di Delo dovuta ad Archita Tarantino e riferita da Eutocio Ascalonita.

(3) Cfr. Bertrand, *Éloges académiques* (Paris, 1890).

(4) Cfr. anche Cayley, *On the Quartic Surface* $(* \between U, V, W)^2 = 0$ (Quart. Journ., 11, 1871). È qui il caso di notare che le superficie quartiche definibili come inviluppi di quadriche sono il tema della nota di Kummer, *Ueber einige besondere Arten von Flächen vierten Grades* (Berliner. Ber., 1872).

per l'inviluppo di una sfera mobile colla condizione di rimanere tangente a tre sfere fisse (*Applications de géométrie et de méchanique,* Paris, 1822). Oltre alla proprietà di avere quattro punti doppi, la ciclide ne possiede altre notevoli, che si apprendono dai seguenti lavori: Mannheim, *Application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à l'étude de la surface enveloppe d'une sphère tangente à trois sphères données* (Nouv. Ann., 19. 1860); Laguerre, *Recherches géométriques sur la cyclide* (Bull. Soc. phil., 1871); Cayley, *On the Cyclide* (Quart. Journ., 12. 1873); Saltel, *Sur la génération des cycliques et des cyclides* (Bull. S. M. F., 3, 1875); Liebheit, *Ueber die Dupin'sche Cyclide* (Diss. Halle, 1886 (1), Cosserat, *Sur la cyclide de Dupin* (Toulose Ann., 6. 1892); ecc. Notisi finalmente che dal punto di vista projettivo sono ciclidi anche le superficie studiate dal Sucharda nella nota *Ueber die Singularitäten einer Gattung von Rückungsflächen vierter Ordnung* (Wiener Ber., 97, 1888).

10. Quella che oggi si chiama " superficie di Steiner „ occupò questo grande geometra durante il suo soggiorno a Roma (1844) epperò veniva da lui chiamata " superficie romana „. Egli non scrisse mai nulla su di essa ed il pubblico la conobbe in occasione delle ricerche di Kummer di cui parlammo nella chiusa del n. 8 (cfr. una nota di Weieretrass in *J. Steiner's Ges. Werke,* 2, Berlin 1882, pp. 723 e 741). La proprietà più saliente di essa è quella di essere tagliata in una coppia di coniche da qualunque suo piano tangente, di più essa è di 4° ordine e 3ª classe: cose che non isfuggirono a Steiner, mentre Weierstrass (l. c.) osservò che le coordinate omogenee de' suoi punti sono esprimibili mediante quattro forme ternarie quadratiche arbitrarie. Cremona e Clebsch scoprirono poi che le assintotiche delle superficie di Steiner sono quartiche gobbe razionali (2). Come notò

(1) Ivi, mediante una speciale rappresentazione delle coordinate di un punto della ciclide in funzione di due parametri, sono determinate le sue linee di curvatura, espressa la sua curvatura integra in un punto qualunque, determinata l'area, ecc.

(2) Cremona, *Sur la surface du quatrième ordre qui a la propriété d'être coupée suivant deux coniques par chacun de se plans tangens* (Journ. f. Math., 63, 1864) e *Rappresentazione della superficie di Steiner e delle superficie rigate di terzo grado sopra un piano* (Rend. Ist. Lomb., 4, 1867); Clebsch, *Ueber die Steiner'sche Fläche* (Journ. f. Math., 67, 1867).

il Darboux (*Sur le contact des courbes et des surfaces*, Bull. Sc. math., II, 4, 1880) essa è l'unica superficie, oltre le quàdriche e le rigate cubiche, per ogni punto della quale passino infinite coniche; inoltre, come scoprì il Picard (*Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales*, Journ. f. Math., 100, 1887; cfr. Guccia, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono unicursali*, Palermo Rend., 1, 1884-87), essa è l'unica superficie non rigata le cui sezioni piane siano tutte curve razionali; essa è dello stesso " tipo " del piano, cioè suscettibile di essere rappresentata sul piano univocamente senza punti eccezionali (Clebsch, Math. Ann., 5, 1872, p. 19); da ultimo se si cerca il luogo dei poli di un piano rispetto a tutte le coniche contenute in una superficie di Steiner si trova un'altra superficie analoga (Lie, *Petite contribution à la théorie de la surface steinérienne*, Arch. f. Math. og Naturw., 3, 1878).

Nell'impossibilità in cui ci troviamo di enumerare tutte le altre proprietà possedute dalla superficie di cui parliamo, citiamo gli scritti principali che, oltre la *Geometrie der Lage* del Reye, trattano di essa: Beltrami, *Estensione allo spazio di tre dimensioni dei teoremi relativi alle coniche dei nove punti* (Giorn. di Mat., 1, 1863), e *Ricerche di geometria analitica* (Bologna Mem., III, 10, 1879); Cayley, *Note sur la surface du quatrième ordre de Steiner* (Journ. f. Math., 64, 1865) e *On Steiner's Surface* (Proc. L. M. S., 5, 1873-74); Moutard, *Sur la surface de Steiner* (Bull. Soc. phil., 2, 1865); Schröter, *Ueber die Steiner'sche Fläche vierten Grades* (Journ. f. Math., 65, 1865); Sturm, *Ueber die römische Fläche von Steiner* (Math. Ann., 4, 1871); Eckardt, *Beiträge zur analytischen Geometrie des Raumes* (Math. Ann., 5, 1872); Laguerre, *Recherches analytiques sur la surface réciproque de la surface de Steiner* (Nouv. Ann., II, 11, 1872) e *Sur la représentation sur un plan de la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner* (Bull. S. M. F., 1, 1872); Rosanes, *Ueber Systeme von Kegelschnitten* (Math. Ann., 6, 1873); Gerbaldi, *La superficie di Steiner studiata nella sua rappresentazione analitica mediante le forme ternarie quadratiche* (Torino, 1881); Vahlen, *Ueber die Steiner'sche Fläche* (Acta, 19, 1895).

11. Oltre che la determinazione delle superficie di quarto ordine

contenenti infinite coniche noi dobbiamo a Kummer la conoscenza di un'altra importantissima superficie che, come vedremo meglio nel Cap. VII, egli scoprì occupandosi di geometria della retta: parliamo della così detta " superficie di Kummer „ con sedici punti doppî (1) e sedici piani tangenti singolari (v. la nota *Ueber die Flächen vierten Grades mit sechszehn singulären Punkten*; Berliner Ber., 1864; cfr. Cayley, *Note sur la surface du quatrième ordre douée de seize points singuliers et de seize plans singuliers*, Journ. f. Math., 73, 1871). Questa superficie è singolarmente importante per le applicazioni che porge alla teoria delle funzioni iperellittiche: lo rilevò incidentalmente il Klein (Math. Ann., 5, 1872, p. 302) e poi più chiaramente il Cayley (*On the double Θ-functions in Connection with a 16-nodal Quartic Surface*, Journ. f. Math., 83, 1877; *On the 16-nodal Quartic Surface*, Id., 84, 1878, e 94, 1883); tale legame si trova sfruttato magistralmente nelle seguenti memorie: Borchardt (1817-1880), *Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche vierter Ordnung mit sechszehn Knotenpunkten durch die Göpel'sche biquadratische Relation zwischen vier Theterfunctionen mit swei Variabeln* (Id., 83, 1877); H. Weber, *Ueber die Kummer'schen Fläche vierten Ordnung mit sechszen Knoten punkten und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen mit zwei Veränderlichen* (Id., 84, 1878); K. Rohn, *Transformation der hyperelliptischen Functionen p = 2 und ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche* (Math. Ann., 15, 1879) e *Die verschieden Gestalten der Kummer'sche Fläche* (Id., 18, 1881). Alle quali servono di complemento i seguenti scritti: Darboux, *Sur la surface à seize points singuliers et les fonctions Θ à deux variables* e *Sur la surface à seize points singuliers* (C. R., 92, 1881); Brioschi, *Sur la surface de Kummer à seize points singuliers* (Ivi); F. Klein, *Ueber Configurationen welche der Kummer'schen Flächen zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind* (Math. Ann., 27, 1886); Reichardt, *Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche durch hyperelliptische Functionen* (Nova Acta Leop.-Car., 50, 1887); Study, *Zur Theorie der Kummer'schen Configuration und der orthogonale Substitutionen* (Leipziger Ber., 44, 1892); E. Pascal, *L'equazione* razionale

(1) È questo il massimo numero di punti doppi isolati che può avere una superficie di 4° ordine.

della superficie di Kummer (Ann. di Mat., II, 18, 1890) e *Sulle sestiche di contatto della superficie di Kummer* (Id., 19, 1891).

Le assintotiche della superficie di Kummer furono determinate da Klein e Lie (*Ueber die Haupttangentencurven der Kummer'sche Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten,* Berliner Ber., 1870; v. anche Math. Ann., 23, 1884); sono curve di 16° ordine, ognuna delle quali, come dimostrò il Reye (*Ueber die Hauptarten der allgemeinen quadratischen Strahlencomplexe und Complexengewebe,* Journ. f. Math., 98, 1885; cfr. Segre, *Sur les courbes des tangentes principales des surfaces de Kummer,* Ivi), è la base di un fascio di superficie di quart'ordine.

La superficie in discorso venne studiata sinteticamente dal Reye in alcune bellissime pagine della *Geometrie der Lage,* dal Caporali nel lavoro *Sopra i piani ed i punti singolari della superficie di Kummer* (Lincei Mem., III, 5, 1878), dallo Schröter in una memoria *Ueber das Fünfflach und Sechsflach und die damit zusammenhängende Kummer'sche Configuration* (Journ. f. Math., 100, 1887) e, mediante una speciale trasformazione doppia di spazio, dal De Paolis nella nota intitolata *Alcune proprietà della superficie di Kummer* (Lincei Rend., IV, 6, 1890_2). Finalmente dal punto di vista della teoria delle sostituzioni la superficie di cui ci occupiamo venne considerata dal Jordan nella memoria *Sur une équation du 16ième degré* (Journ. f. Math., 70, 1869).

Fra i casi speciali che può presentare la superficie di Kummer il più importante è indiscutibilmente quello offerto dalla " superficie delle onde ", la quale ha una storia ed una letteratura a sè. Essa incontrasi per la prima volta nei *Mémoires sur la double réfraction* di Fresnel (1788-1827) (1) presentati nel 1821 all'Accademia delle scienze di Parigi e pubblicati sei anni dopo nel t. 7 dei *Mémoires* di detto sodalizio; ivi ne è costruita l'equazione quasi sperimentale basandosi sulle proprietà di cui i dati fisici insegnavano che doveva godere e di più è data la seguente notevole generazione: " Si seghi un ellissoide con un piano passante pel centro e sulla perpendicolare condotta da questo a quello si portino delle lunghezze eguali ai semidiametri della relativa sezione; il luogo degli estremi è la superficie d'onda ". La deduzione diretta e rigorosa della equazione superficie fu

(1) Cfr. Arago, *Œuvres complètes,* 1 (Paris, 1854).

fatta poco dopo da Ampère (1775-1836) (1) (*Sur la détermination de la surface courbe des ondes lumineuses dans un milieu dont l'élasticité est différente suivant les directions principales,* Ann. de Chim. et de Phys., 39, 1828), in seguito da Cauchy (1789-1857), prima nell'*Application des formules qui représentent le mouvement d'un système de molécules sollécitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelles* (Exercices de mathématiques, 5, Paris, 1830) e poi meglio nella nota *Sur la polarisation rectiligne et la double réfraction* (Mém. de l'Acad. des Sciences, 18, 1842; v. anche C. R., 11 e 12) e, circa nello stesso tempo, da sir John F. W. Herschel (*Traité de la lumière,* trad. par Verhultst e Quetelet, Paris, 1829 e 1833). Non molto dopo (1830) W. R. Hamilton (in uno scritto che fa parte del vol. 16 di Irish Trans., 16, 1830) e Mac Cullagh (*On the Double Refraction of Light in a crystallized Medium, according to the Principles of Fresnel,* Ivi; *Geometrical Propositions applied to the Wave Surface of Light,* Id., 18, 1833; *On the Laws of crystalline Reflexion and Refraction,* Id., 18, 1837) si occupavano della stessa teoria (2), giungendo teoricamente alla scoperta della " rifrazione conica ", fenomeno che era sfuggito ai fisici e che ben presto H. Lloyd verificò sperimentalmente. Ad essi tennero dietro il Sylvester (*Analytical Development of Fresnel's optical Theory of Chrystals,* Phil. Mag., 11, 1837 e 12, 1838), Archimbald Smith (*Investigation of the Equation of the Equation to Fresnel's Wave Surface,* Cambridge Trans., 6, 1838) e Plücker (*Discussion de la forme générale des ondes lumineuses,* Journ. f. Math., 19, 1839), al quale ultimo è dovuta l'importante osservazione dell'essere la superficie d'onda la propria polare reciproca rispetto ad un certo ellissoide. Se ne occuparono anche il Lamé nelle *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* (Paris, 1852), poi J. Bertrand (*Note sur la surface des ondes,* C. R., 47, 1858), P. Zech (*Die Eigenschaften der Wellenflächen der zweiaxiger Krystall, mittelst der höheren Geometrie abgeleitet,* Journ. f. Math., 52, 1856, e *Die Krümmungslinien der Wellenfläche zweiaxiger Krystalle,* Id., 54, 1857 e 55, 1858), H. Durande (*Recherches sur la surface des ondes,* Nouv. Ann.,

---

(1) Id., 2 (Paris, 1854).

(2) Cfr. R. P. Graves, *Life of Sir R. W. Hamilton,* 1 (Dublin, 1882), p. 623-638 e 685-692.

II, 2, 1863), il Cayley (*On the Wave Surface*, Quart. Journ., 3, 1860, *Note on the Wave Surface*, Ivi, *Equation of the Wave Surface in Elliptic Coordinates*, Mess., II, 8, 1879, e *Sur la surface des ondes*, Ann. di Mat., II, 20, 1892, l'ultima delle quali è un commento agli scritti del Brioschi, *Sulle linee di curvatura della superficie delle onde*, Ann. di Mat., 2, 1859, e del Combescure, *Sur les lignes de courbure de la surface des ondes*, Ivi), W. Roberts (*Cubature de la surface des ondes*, Id., 4, 1861), il Mathieu (*Note sur la surface de l'onde*, Journ. de Math., II, 11, 1866), ed il Niven (*On some Theorems connected with the Wave-Surface*, Quart. Journ., 9, 1868). Ma chi la studiò più d'ogni altro con assiduità e buon successo è il Mannheim del quale vanno citati i seguenti scritti: *Construction géométrique pour un point de la surface des ondes, des centres de courbure principaux et des directions des lignes de courbure* (C. R., 64, 1867); *Deux théorèmes nouveaux sur la surface de l'onde* (Id., 78, 1874); *Sur la surface de l'onde* (Ass. fr., 1874); *Propriétés des diamètres de la surface de l'onde et interprétation physique de ces propriétés* (C. R., 81, 1875); *Sur la surface de l'onde* (Ass. fr., 1875); *Nouvelles propriétés géométriques de la surface de l'onde, qui s'interprètent en optique* (C. R., 85, 1876); *Communication sur la surface de l'onde* (Ass. fr., 1877); *On the Wave Surface* (Mess., 7, 1877); *Sur la surface de l'onde* (Ass. fr., 1878); *Détermination géométrique des ombilics de la surface de l'onde* (C. R., 88, 1879); *Sur la surface de l'onde et sur la transformation d'un pinceau* (Ivi); *La surface de l'onde considérée comme surface limite* (Id., 90, 1880); *Nouvelle génération de la surface de l'onde et constructions diverses* (Ivi); *Sur la surface de l'onde et théorèmes relatifs au lignes de courbure des surfaces du second ordre* (Proc. R. S., 32, 1881); *Construction plane des éléments de courbure de la surface de l'onde* (Coll. math., 1881); *On the Wave Surface* (Mess., 14 e 15, 1885). Ricorderemo ancora le seguenti memorie: E. Catalan (1814-1894), *Mémoire sur une transformation géométrique et sur la surface des ondes* (Belgique Mém., 38, 1871); Böklen, *Ueber die Wellenflächen zweiaxiger Krystalle* (Zeitschr. f. Math., 25, 1880); S. Roberts, *On some Forms of the Equation of the Wave Surface* (Quart. Journ., 17, 1881); Darboux, *Sur une nouvelle définition de la surface des ondes* (C. R., 92, 1881), *Sur les lignes asymptotiques de la surface des ondes* (Id., 97, 1885), *Sur les lignes de courbure de la sur-*

face des ondes (Ib., id.) e *Sur la surface des ondes* (Ann. Éc. Norm., III, 6, 1889); Knoblauch, *Ueber die allgemeine Wellenfläche* (Diss. Berlin, 1882); e Brill, *Bestimmung der optischen Wellenfläche aus einem ebenen Centralschnitte derselben* (Math. Ann., 34, 1889).

Dal punto di vista della geometria proiettiva la superficie delle onde non differisce dal " tetraedroide ", di Cayley, il quale s'incontra per la prima volta nella nota di questo grande geometra *Sur la surface des ondes* (Journ. de Math., 11, 1846) e poi nuovamente nelle memorie *Sur un cas particulier de la surface du quatrième ordre avec seize points singuliers* (Journ. f. Math., 65, 1866) e *On the Tetrahedroid as a particular Case of the 16-nodal Quartic Surface* (Id., 87, 1879). Ad esso si riferiscono la memoria del Segre *Su una trasformazione irrazionale dello spazio e sua applicazione allo studio del complesso quadratico di Battaglini e di un complesso lineare di coniche iscritte in un tetraedro* (Giorn. di Mat., 21, 1883) e la nota del Hofmann, *Reduction der Gleichung des Tetrahedroids auf die Form* $\sqrt{x\xi} + \sqrt{y\eta} + \sqrt{z\zeta} = 0$ (Journ. f. Math., 98, 1885). Vi sono poi delle superficie di Kummer che in più modi possono considerarsi come tetraedroidi; esse vennero scoperte dal Rohn (*Einige specielle Fälle der Kummer'schen Fläche,* Leipziger Ber., 1884) e dal Segre (*Sur un cas particulier de la surface de Kummer*, Ivi). Altre ve ne sono che, come il tetraedroide, godono la proprietà che le coordinate dei loro punti sono esprimibili mediante funzioni biperiodiche di due parametri; esse furono studiate da G. Humbert nella memoria *Sur les surfaces de Kummer* (Am. Journ., 16, 1894).

La proprietà della superficie di Kummer di essere correlativa a sè stessa diede origine alla ricerca delle superficie aventi il medesimo carattere, della quale si occuparono Kummer (*Ueber diejenigen Flächen, welche mit ihren reciprok polaren Flächen von gleicher Ordnung sind und dieselben Singularitäten besitzen,* Berliner Ber., 1878) e Cayley (*On a Sibi-reciprocal Surface,* Ivi), mentre il legame di essa con le funzioni iperellittiche condusse a classi più generali di superficie che furono studiate da W. Wirtinger nella memoria *Ueber eine Verallgemeinerung der Theorie der Kummer'schen Fläche und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen zweier Variabeln* (Monatshefte, 1, 1890) e da G. Humbert

nella *Théorie générale des surfaces hyperélliptiques* (Journ. de Math., IV, 9, 1893).

12. Kummer, oltre alla superficie che porta il suo nome, si occupò di altre superficie di quart'ordine con punti singolari, nelle quali egli s'imbattè nel corso delle celebri sue investigazioni intorno ai sistemi di raggi rettilinei (v. Cap. VII, n. 6); in seguito lo studio metodico di esse venne fatto, prima da Cayley in tre memorie: *On Quartic Surfaces* (Proc. L. M. S., 3, 1869-71) — alle quali si possono riunire le altre due del medesimo autore, *On the Quartic Surfaces* $(* \between U, V, W)^2 = 0$ (Quart. Journ., 10, 1869 e 11, 1870) e la nota dell'Eckardt sopra *Eine Eigenschaft der Hesse'schen Fläche einer Fläche dritter Ordnung* (Zeitschr. f. Math., 19, 1874) — e poi dal Rohn nella memoria *Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihre Gestaltung* (Gekrönte Preisschrift der Jablonowski'schen Gesellschaft, Leipzig, 1886; cfr. Math. Ann., 29, 1887). A questo geometra devesi poi uno scritto, *Ueber die Flächen vierter Ordnung mit dreifachen Punkte* (Math. Ann., 24, 1884) ove è trattato in modo più completo il tema toccato nella dissertazione del Lampe, *De superficiebus quarti ordinis, quibus puncta triplicia insunt* (Berlin, 1864).

Una notevole superficie di 4° ordine è il luogo dei vertici dei coni quàdrici passanti per sei punti dati: è la " superficie di Weddle „ così denominata perchè la s'incontra per la prima volta nella memoria di T. Weddle (1817-1853) *On the Theorems in Space analogous to those of Pascal and Brianchon in a Plane* (Cambridge Journ., 5, 1850). Essa è stata poi studiata dal Cayley (*Sur les cônes du second ordre qui passent par six points donnés,* C. R., 52, 1861), dal Hierholzer (*Ueber eine Fläche der vierten Ordnung,* Math. Ann., 4, 1871) e dall' Hunyady (*Ueber den geometrischen Ort der Kegelspitzen der durch sechs Punkte gehenden Kegelflächen zweiten Grades,* Journ. f. Math., 92, 1882); in tempi a noi più vicini essa somministrò delle importanti applicazioni delle funzioni iperellittiche allo Schottky (*Ueber die Beziehungen zwischen den 16 Thetafunctionen von zwei Variabeln,* Id., 105, 1889) ed al Caspary (*Sur les deux formes sous lesquelles s'expriment, au moyen des fonctions théta de deux arguments, les coordonnées de la surface du quatrième degré, décrite par les som-*

mets des cônes du second ordre qui passent par six points donnés, C. R., 112, 1891; *Nouvelle manière d'exprimer, au moyen des fonctions hyperelliptiques de première espèce, les cordonnées etc.*, Bull. Sc. Math., II, 15, 1891). Tale superficie fa parte della collezione di figure geometriche a cui condusse lo studio della teoria delle caratteristiche per le coniche nello spazio, della quale ci occuperemo in più opportuno momento (v. Cap. IX, n. 5).

Vanno ancor ricordate alcune superficie di 4° ordine che non sono rigate, ma contengono un certo numero di rette; ciascuna è il luogo dei punti in cui si tagliano gli elementi corrispondenti di quattro spazî di piani fra loro collineari; l'ordine ne fu determinato da Chasles; poi ne fe' cenno lo Schur nella memoria *Ueber die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen* (Math. Ann., 18, 1881); lo stesso geometra ne fece più tardi uno studio approfondito, come si apprende dall'altro lavoro *Ueber eine besondere Classe von Flächen vierter Ordnung* (Id., 20, 1882). Aggiungasi che *Sulla superficie del quarto ordine generata da due stelle di piani e da una rete di quadriche projettive fra loro* abbiamo una memoria di M. Pannelli (Giorn. di Mat., 29, 1891), e *Sur la surface desmique du quatrième ordre* una dell'Humbert (Journ. de Math., IV, 3, 1891). Nè si deve condannare alla dimenticanza una classe importante di superficie quartiche, la quale venne studiata in modo esauriente da L. Heffter nella nota *Ueber gewisse Flächen vierter Ordnung* (*Isogonalflächen*) (Journ. f. Math., 115, 1895).

Chiuderemo questa rassegna delle ricerche intorno a speciali superficie di 4° ordine coll'osservare che molte delle superficie finora studiate sono razionali, cioè rappresentabili univocamente su un piano; tali sono: la superficie a conica doppia, la superficie con retta doppia, la superficie con un punto triplo (in particolare la superficie di Steiner), e quella di cui il Cremona si occupò nella nota *Sopra una certa superficie di quart'ordine* (Coll. math., 1881). Ma la determinazione completa di tali superficie venne fatta dal Nöther nell'importante memoria *Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung* (Math. Ann., 33, 1889), ove sono metodicamente trattate, non solo l'or citata superficie che il Cremona studiò, ma ancora due altre, dianzi ignote e non meno notevoli.

13. Intorno a superficie di ordine superiore al 4° esistono poche ricerche e fra loro non collegate. Fra quelle di 5° ordine finora studiate spicca una che diede materia alla memoria di Caporali *Sulla superficie del 5° ordine dotata di una curva doppia del 5° ordine* (Ann. di Mat., II, 7, 1875) e di cui il del Re trovò una generazione col mezzo di forme fondamentali projettive (*Nuova costruzione della superficie del quint'ordine, dotata di curva doppia del quint'ordine,* Napoli Rend., 25, 1886; *Sulla superficie del 5° ordine, dotata di curva doppia del 5° ordine,* Lincei Rend., IV, 6, 1890_2); quest'ultimo geometra studiò poi altre particolari superficie di 5° ordine (1), mentre E. Pascal scrisse *Su di un'estensione della configurazione delle dieci rette della superficie di 5° ordine a quintica doppia* (Id., 2, 1893_1), S. Kantor *Ueber zwei besondere Flächen sechster Klasse* (Wiener Ber., 1879), Em. Weyr *Ueber die Flächen sechsten Grades mit einer dreifachen cubischen Curve* (Id., 85, 1882), il Pieri *Sulle tangenti triple di alcune superficie del sesto ordine* (Torino Atti, 24, 1889), G. Humbert *Sur une surface du sixième ordre, liée aux fonctions abéliennes de genre trois* (C. R., 120, 1895) e *Sur une surface du sixième ordre qui se rattache à la surface de Kummer* (Ivi), il Cayley *On a Surface of Eight Order* (Math. Ann., 4, 1871) (2) ed il Battaglini *Intorno ad una superficie di 8° ordine* (Giorn. di Mat., 13, 1875).

Altre indagini analoghe passiamo sotto silenzio per la loro indole troppo speciale. E preferiamo volgerci a certe notevoli categorie di superficie di ordine quale si voglia. Meriterebbero fra esse il primo posto le sviluppabili, il cui studio fu iniziato da Eulero (*De solidis, quorum superficiem in planum explicare licet,* Nov. Comm. Petrop., 16, 1872). Ma ci consideriamo esonerati dall'estenderci su di esse perchè, in forza della

(1) *Di cinque superficie del 5° ordine con rette semplici e doppie ed una retta tripla* (Lincei Rend., IV, 7, 1891_2), *Su una superficie del 5° ordine dotata di una retta tripla, di rette doppie e di rette semplici* (Ivi), *Sulla superficie del 5° ordine dotata di cubica doppia e punto triplo* (Id., V, 1, 1892_2); *Altre proprietà relative alle superficie del 5° ordine con cubica doppia e punto triplo* (Ivi), *Sopra alcune varietà delle superficie del 5° ordine con cubica doppia e punto triplo* (Ivi), *Sopra cinque modi diversi di produrre per forme projettive la superficie del 5° ordine a quintica doppia* (Torino Atti, 28, 1892-93), *Sulle superficie del 5° ordine con cinque punti tripli ed una cubica doppia* (Lincei Rend., V, 2, 1893_2 e 3, 1894_1).

(2) Questa superficie è il luogo dei vertici dei coni quàdrici tangenti a sei rette date.

legge di dualità nello spazio, le loro proprietà scaturiscono da quelle delle curve a doppia curvatura di cui ci occuperemo nel prossimo Cap.; basti far qui cenno della memoria di V. Petersson, *Om Developpablers Medelpunktsytor* (Lund Akadem. Afhandling, 1886), ove sono determinate le caratteristiche del luogo dei centri di curvatura di una sviluppabile algebrica, e dei più cospicui scritti concernenti certe sviluppabili particolari; sono i seguenti: Cremona, *Intorno alle coniche inscritte in una stessa superficie sviluppabile del quarto ordine (e terza classe)* (Ann. di Mat., 2, 1859), *Sur les surfaces développables du cinquième ordre* (C. R., 54, 1862. Cfr.: d'Ovidio, *Dimostrazione di alcuni teoremi sulle superficie sviluppabili di 5° ordine*, Giorn. di Mat., 3, 1865; N. Salvatore-Dino, *Sulla sviluppabile di 5° ordine*, Ivi); Cayley, *On the Developable derived from an Equation of the Fifth Order* (Cambridge Journ., 5, 1860), *On certain Developable Surfaces* (Quart. Journ., 6, 1864), *On a special Sextic Developable* (Id., 7, 1866), *On a certain Sextic Developable, and Sextic Surface connected therewith* (Id., 9, 1868), *Note sur quelques torses sextiques* (Ann. di Mat., II, 2, 1868), *Addition à la Note etc.* (Ivi), e *On a Certain Sextic Torse* (Cambridge Trans., 11, P. 3ª, 1871); Schwarz, *De superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum* (Journ. f. Math., 64, 1865).

Dopo aver date queste poche indicazioni, lasciamo in disparte tali particolari superficie con infinite rette e passiamo a dire qualche cosa delle rigate in generale (1). Di esse si occuparono già Monge nelle *Additions* alla sua *Géométrie descriptive* (Paris, an VII = 1798) e il suo discepolo Hachette (*Note sur les surfaces réglées*, Journ. f. Math., 8, 1832; cfr. anche Corr. Éc. pol., 2, 1809-1813); ma si può dire che la teoria geometrica di esse sia stata inaugurata da Chasles con due lavori (*Sur quelques propriétés générales des surfaces gauches*, Journ. de Math., 2, 1837; *Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite*, Corr. math., 11, 1839) dai quali si apprende la projettività fra il fascio dei piani tangenti a una rigata nei punti di una generatrice e la punteggiata dei punti di contatto, nonchè l'esistenza del punto

---

(1) Di esse trattano diffusamente tutte le opere di geometria descrittiva, fra cui basti qui ricordare, oltre quella del Fiedler, il *Traité de géométrie descriptive* del de la Gournerie (Paris, 1860, 1862 e 1864).

centrale su ogni generatrice e della linea di stringimento in ogni rigata; l'essere per una rigata l'ordine eguale alla classe e l'ordine della linea doppia eguale alla classe della sviluppabile bitangente venne osservato non molto più tardi dal Cayley (*On the Theory of Skew Surfaces*, Cambridge Journ., 7, 1852), il quale poi, coll'aiuto del Salmon (cfr. *On a Classe of Ruled Surfaces,* Cambridge Journ., 8, 1853), determinò le proprietà caratteristiche delle rigate ciascuna delle quali è il luogo delle rette secanti quattro curve date, oppure bisecanti una e secanti altre due, o bisecanti di due, o trisecanti di una e secanti una seconda o quadrisecanti di una curva (*On Skew Surfaces, otherwise Scrolls,* Phil. Trans., 153, 1863; cfr. Rupp, *Ueber die Abhängigkeit der Charaktere einer durch Leitcurven bestimmten Regelfläche von den Charakteren dieser Leitcurven*, Math. Ann., 18, 1881).

Altre questioni particolari, più o meno importanti, relative alle medesime superficie si trovano risolte nelle memorie seguenti: Plücker, *Théorie générale des surfaces réglées, leur classification et leur construction* (Ann. di Mat., II, 1, 1867); Lüroth, *Zur Theorie der windschiefen Flächen* (Journ. f. Math., 67, 1867); Clebsch, *Ueber die Curven der Haupttangenten bei windschiefen Flächen* (Id., 68, 1868); Voss, *Zur Theorie der windschiefen Flächen* (Math. Ann., 8, 1875) e *Ueber die Haupttangentcurven der windschiefen Flächen* (Id., 12, 1877); H. Schubert, *Bemerkung zu der Bestimmung der Anzahl der Torsallinien einer Regelfläche* (Id., 17, 1880); Pittarelli, *Le assintotiche delle rigate algebriche di genere qualunque che fanno parte di una congruenza lineare* (Lincei Rend., V, 3, 1894_2); Björling, *Singuläre Generatricen in algebraischen Regelflächen* (Stockh. Öfv., 1888) e *Die singulären Generatricen der Binormalen- und Hauptnormalen-Flächen* (Stockh. Vetensk. Bihang., 15, 1889); Wiman, *Ueber die Doppelcurve auf den geradlinigen Flächen* (Acta, 19, 1895). Scendendo alle rigate di ordini particolari ricorderemo quanto già dicemmo (nn. 7 e 8) intorno a quelle degli ordini 3° e 4°; a quelle del 5° ordine è consacrata la memoria dello Schwarz, *Ueber die geradlinigen Flächen fünften Grades* (Journ. f. Math., 67, 1867), ed a quelle del 6° il lavoro del Bergstedt *Om Regelytor of sjette Graden. I. Unikursala Ytor* (Lund Akad. Afh., 1886) e la *Klassification af regelytorna af 6. graden* del Wiman (Lund, 1892); di altre speciali, benchè di ordine qualunque, si occuparono il Catalan nel

Mémoire sur les surfaces gauches à plan directeur (Journ. Éc. pol., 19ᵉ cah., 1843) ed il de la Gournerie nell'opera *Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques avec des notes par M. Arthur Cayley* (Paris, 1867). Da questa il Cayley ebbe lo stimolo a studiare le rigate generate dalle congiungenti i punti omologhi di due curve algebriche in corrispondenza algebrica (*On certain Skew Surfaces, otherwise Scrolls,* Cambridge Trans., 11, P. 2ª, 1869), le quali sono più generali di quelle di cui tratta la memoria di Em. Weyr intitolata *Erzeugniss mehrdeutiger Elementargebilde im Raume* (Prager Abh., VI, 5, 1872), essendo qui le linee direttrici rette, ed anche di quelle a cui è consacrata quella del Chizzoni *Sulle superficie e sulle linee che si ottengono come inviluppo delle rette congiungenti i punti corrispondenti di due curve omografiche* (Lincei Mem., III, 3, 1878-79); allo stesso Weyr poi devesi una *Notiz über Regelflächen mit rationalen Doppelcurven* (Wiener Ber., 84, 1881). Va da ultimo notato che le rigate razionali vennero studiate, non senza ottimi risultati, da A. Armenante (*Intorno alla rappresentazione delle superficie gobbe di genere $p=0$ sopra un piano*, Ann. di Mat., II, 4, 1870-71), dal Clebsch (*Ueber die geradlinigen Flächen vom Geschlechte $p=0$,* Math. Ann., 5, 1872), e dal Brill (*Ueber rationale Curven und Regelflächen,* Id., 36, 1890).

14. Alle superficie rigate si possono far seguire, da un certo punto di vista, le superficie contenenti un numero finito di rette, da un altro le superficie contenenti infinite coniche. Quelle furono studiate dallo Sturm (*Ueber die Flächen mit einer endlichen Zahl von (einfachen) Geraden, vorzugweise der vierten und fünften Ordnung,* Math. Ann., 4, 1871) e dall'Affolter (*Ueber Gruppen gerader Linien auf Flächen höheren Ordnung,* Id., 27, 1886 e 29, 1887), queste da Ed. Weyr (*Sur l'arrangement des plans tangents de certaines surfaces,* Bordeaux Mém., II, 3, 1879, e *Zur Theorie der Flächen, welche eine Schar von Kegelschnitte enthalten,* Monatshefte, 2, 1891), da A. Weiler (*Ueber einige Flächen welche Schaaren von Kegelschnitten enthalten,* Zeitschr. f. Math., 30, 1885), da G. Koenigs (*Recherches sur les surfaces par chaque point desquelles passent deux ou plusieurs coniques tracées sur la surface,* C. R., 105, 1887, e *Détermination de toutes les surfaces plusieurs fois engendrées par des coniques,* Ann. Éc. norm.,

III, 5, 1888) e dal Blutel, *Recherches sur les surfaces qui sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes* (Ann. Éc. norm., III, 7, 1890).

Di natura differente sono le superficie che ammettono infinite trasformazioni infinitesime in sè stesse di cui si occuparono nel 1870 Klein e Lie (*Sur une certaine famille de courbes et de surfaces,* C. R., 70) e recentemente il Lie stesso (*Bestimmung aller Flächen, die eine Schaar von projectiven Transformationen gestatten,* Leipziger Ber., 47, 1895), nonchè F. Enriques (*Le superficie con infinite trasformazioni infinitesime in sè stesse,* Atti Ist. Ven., VII, 4, 1893) e G. Fano (*Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni projettive in sè stesse,* Lincei Rend., V, 4, 1895_1, e *Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni projettive in sè,* Palermo Rend., 10, 1896).

Alla geometria metrica appartiene il *Beitrag zur Kenntniss der algebraischen Flächen mit Mittelpunkt* di K. Stoltz (Zeitschr. f. Math., 36, 1891) e il *Mémoire sur les surfaces enveloppes de sphères* (Journ. Éc. pol., 53 cah., 1883) del Lecornu; altrettanto dicasi delle indagini intorno a superficie che (al pari della superficie delle onde) sono deducibili da una quàdrica e che vennero studiate dal Cayley nei lavori seguenti: *Sur la surface qui est l'enveloppe des plans conduits par les points d'un ellipsoïde perpendiculièrement aux rayons menés par le centre* (Ann. di Mat., 1, 1859), *Sur la surface parallèle à l'ellipsoïde* (Id., 2, 1860), *On the Centro-surface of an ellipsoid* (Proc. L. M. S., 3, 1869-71 e Cambridge Trans., 12, P. I, 1873), e *Note on the Theory of Apsidal Surfaces* (Quart. Journ., 16, 1879); argomento simile hanno le due note di T. Craig, *The Counter-pedal Surface of the Ellipsoid* (Am. Journ., 4 e 5, 1882).

Della stessa indole sono gli scritti intesi a rispondere alla questione proposta nel 1886 dall'Accademia delle Scienze di Parigi come tema pel concorso al gran premio delle scienze matematiche: " Studiare le superficie che ammettono tutti i piani di simmetria di uno dei poliedri regolari ". Il premio fu conferito al lavoro del Lecornu *Sur les surfaces possédant les mêmes plans de symétrie de l'un des polyèdres réguliers* (Acta, 10, 1887), ma va anche ricordato con onore l'*Étude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier* (Ann. Éc. norm., III, 4, 1887) del Goursat; sono legate a queste

memorie le note di E. Lebon, *Sur les surfaces admettant les plans de symétrie du tétraèdre régulier et du cube* (Journ. de math. spéc., 1889) e *Sulla determinazione degli ombelichi delle superficie tetraedriche* (Palermo Rend., 4, 1890) e di E. Ciani, *Sulle superficie algebriche simmetriche* (Lincei Rend., IV, 6, 1890_1).

Di indole projettiva sono invece gli studî intorno alle superficie generabili con forme fondamentali in corrispondenza algebrica e che si trovano consegnati nei lavori seguenti: Jung, *Sulle superficie generate da due sistemi Cremoniani reciproci di grado* m (Lincei Rend., IV, 1, 1885), *Sui sistemi cremoniani reciproci di grado* m (Ivi), *Sulle superficie generate da tre sistemi deducibili l'uno dall' altro mediante trasformazioni birazionali* (Id., IV, 2, 1886_1); Visalli, *Sopra una serie di superficie rappresentabili punto per punto sopra un piano* (Ivi); G. Loria, *Sugli enti geometrici generati da forme fondamentali in corrispondenza algebrica* (Giorn. della Soc. di Lett. e Conv. scientifiche, Genova, 1887; oppure Giorn. di Mat., 34, 1896); Doehlemann, *Untersuchung der Flächen welche sich durch eindeutig aufeinander bezogenes Strahlenbündel erzeugen lassen* (Diss. München 1889).

Importanza incomparabilmente maggiore hanno le indagini intorno alle superficie algebriche che sono di dato genere oppure le cui sezioni piane sono di genere assegnato; fra le prime vanno ricordate quelle dell'Humbert *Sur la théorie générale des surfaces unicursales* (Math. Ann., 45, 1894) (1) e quelle del Castelnuovo *Sulle superficie di genere zero* (Mem. Soc. XL, III, 1896), fra le seconde — che hanno per loro punto di partenza un teorema di Picard che citammo occupandoci della superficie di Steiner (v. n. 8) — quelle che si trovano esposte nei seguenti scritti: Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche* (Palermo Rend., 4, 1890), *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere 3* (Torino Atti, 25, 1890), *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve ellittiche* (Lincei Rend., V, 3, 1894_1) e *Sulle superficie algebriche che ammettono un sistema doppiamente infinitò di sezioni piane riduttibili* (Ivi; è qui dimostrata una proposizione che il Kronecker comunicò senza dimostrazione il 2 maggio 1886 all'Acca-

---

(1) Cfr. la memoria dello stesso autore *Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques* (Journ. de Math., IV, 10, 1894).

demia dei Lincei; v. Rend., IV, 2) (1); Humbert: *Sur une classe de surfaces à génératrices rationnelles* (C. R., 116, 1893) e *Sur une propriété d'une classe de surfaces algébriques* (Ivi); Enriques, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche* (Torino Mem., II, 44, 1894). A tali investigazioni si collegano quelle del Castelnuovo *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche* (Lincei Rend., V, 3, 1894$_1$) nonchè le altre compiute in comune dal Castelnuovo e dall'Enriques *Sur les surfaces algébriques admettant un groupe continu de transformations birationnelles en elles-mêmes* (C. R., 121, 1895), nota a cui seguì l'altra del Painlevé *Sur les surfaces algébriques qui admettent un groupe continu de transformations birationnelles* (Ivi).

Molte altre classi di superficie furono considerate dai geometri; nell'impossibilità di menzionarle tutte, ci limitiamo a ricordare quelle di cui occupossi il Fouret (cfr. il n. 15 del Cap. prec.), quelle algebriche di area minima di cui parleremo più innanzi (Cap. V, n. 9), e quelle esaminate dall'Eckardt nelle note *Ueber die Flächen, deren Gleichungen aus denen ebener Curven durch eine bestimmte Substitution hervorgehen* (Math. Ann., 7, 1874) e *Ueber eine allgemeine Classe von Flächen und die Fläche dritter Ordnung* (Zeitschr. f. Math., 20, 1875).

E qui ci arrestiamo, non per la illusione di avere percorso tutto il campo d'indagine a cui è consacrato il presente capitolo, ma per la persuasione di non poterne mai raggiungere i confini (2).

(1) Cfr. anche le *Osservazioni* del Castelnuovo *intorno alla geometria sopra una superficie algebrica* (Rend. Ist. Lomb., II, 24, 1891) e la recentissima memoria dello stesso geometra intitolata *Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Mem. Soc. XL, III, 10, 1896).

(2) Ad es. non potemmo far cenno dell'applicazione dei sistemi articolati, alla quale è dovuto un metodo di costruzione estremamente notevole di qualsivoglia superficie algebrica, che il Sylvestrer ha immaginato e G. Koenigs ha di recente dimostrato nella nota dal titolo *Toute surface algébrique peut être décrite par le moyen d'un système articulé* (C. R., 120, 1895).

CAPITOLO IV.

Teoria delle curve algebriche a doppia curvatura.

1. La teoria delle curve piane è suscettibile di venire generalizzata in due direzioni differenti; se si bada all'essere una di tali curve rappresentabile analiticamente col mezzo di una equazione unica fra le coordinate di un punto *del piano*, come analoga di essa si presenta la teoria delle figure rappresentabili con una equazione unica fra le coordinate di un punto *nello spazio*, cioè la teoria delle superficie della quale, almeno in parte, ci occupammo nel Capitolo precedente; se invece si osserva essere una curva piana una serie semplicemente infinita di punti, è naturale togliere la condizione che questi appartengano ad un piano, e si può o surrogarla con quella che essi appartengano ad una superficie determinata, oppure più generalmente sopprimerla completamente: nasce allora la teoria delle " curve a doppia curvatura " (1).

Che tali notevoli enti geometrici non siano rimasti sconosciuti agli antichi è dimostrato da una soluzione (che già menzionammo) del problema di Delo, suggerita da Archita di Taranto, fondata sull'uso della curva sezione di un toro con un cilindro (2) ed è confermato da alcune pagine di Pappo ove sono dimostrate delle notevoli proprietà della curva che è l'analoga sulla sfera della spirale d'Archimede nel piano (3). Che anche i moderni abbiano rivolta ad essi la propria attenzione è provato ad esempio dal trattato *De sectione superficiei sphaericae per superficiem sphae-*

---

(1) Questo nome s'incontra per la prima volta nella memoria del Pitot (1695-1771) *Sur la quadrature de la moitié des arcs d'une courbe appelée le compagne de la cicloïde* (Mém. de Paris, 1724).

(2) V. *Archimedis Opera omnia*, ed. Heiberg, 3 (Lipsiae, 1881), p. 98 e segg.

(3) *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt*, ed. Hultsch (Berolini, 1876), p. 264 e segg.

ricam, cylindricae per cylindricam et conicae per conicam (Divionae, 1662) di P. Courcier (1604-1692).

Ma lo studio metodico delle curve gobbe venne inaugurato soltanto nel 1731 da Clairaut; esso fu validamente continuato da molti geometri di cui ci occuperemo nel Cap. seg., nel quale tratteremo delle proprietà infinitesimali dello spazio; nell'attuale invece esamineremo le principali ricerche istituite (salvo poche eccezioni) in base all'ipotesi che le curve considerate siano algebriche, campo questo che solo in quest'ultimo mezzo secolo venne coltivato con risultati degni di prendere posto nei fasti della storia della matematica.

2. La teoria che imprendiamo a trattare non presenta nel proprio andamento molte analogie sostanziali con alcuna delle discipline anteriormente studiate: donde la ragione per cui le difficoltà che essa offre non furono affrontate e vinte che ai tempi nostri. Si opinò per lungo volger d'anni (1) che ogni curva dello spazio si potesse considerare per intersezione di due superficie e quindi rappresentare analiticamente mediante due equazioni; ma non si tardò a riconoscere (coll'esempio delle cubiche gobbe alla mano) l'esistenza di curve intersezioni incomplete di due superficie, epperò la mancanza di generalità di cui era affetta quella rappresentazione analitica (2). A surrogarla provvide il Cayley in due modi: uno consiste nel considerare una curva come complesso (cfr. Cap. VII) delle rette che la incontrano (*On a New Analytical Representation of Curves in Space*, Quart. Journ., 3, 1860, e 5, 1862) e venne sfruttato dal Voss nella memoria *Ueber Raumcurven und Developpabele* (Math. Ann., 13, 1878); l'altro si apprende dalle importantissime *Considérations générales sur les courbes en espace* (C. R., 54, 1862 e 58, 1864) e si riduce a considerare ogni curva gobba come l'intersezione di un cono con una " superficie monoide " (cioè del-

(1) Cfr.: Euler, *Introductio in analysin infinitorun* (Losanna, 1748), 2, p. 390; Magnus, *Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Raumes* (Berlin, 1837), p. 160; ecc.

(2) Il primo, per quanto ci consta, a segnalare la questione " come si può rappresentare analiticamente una curva che non sia completa intersezione di due superficie? " fu il Cayley (v. la fine della *Note sur les hyperdéterminants*, Journ. f. Math., 24, 1847).

l'ordine μ con un punto μ—1-plo) segante ancora il cono in un certo numero di rette (1) e venne forse, per la prima volta, applicato da Ed. Weyr nella memoria *Ueber algebraische Raumcurven* (Prager Abh., 6, 1874). Prescindendo da questi artifici, si credette che col mezzo delle equazioni di tre superficie passanti per una curva questa potesse venire completamente rappresentata; ma la teoria delle funzioni algebriche, insegnando che una varietà a $\nu < n$ dimensioni di uno spazio a n dimensioni, è in generale rappresentabile completamente soltanto mediante $n + 1$ equazioni (2), fece nascere dei dubbî sulla giustezza di tale opinione: ed infatti venne addotto un esempio (3) di una curva per rappresentar. la quale sono indispensabili quattro equazioni.

A questa complicazione della rappresentazione analitica completa di una curva gobba algebrica corrisponde la difficoltà che presenta il caratterizzare pienamente una tale curva. Infatti si suppose un tempo che la nozione di ordine fosse sufficiente per classificare le curve gobbe; ma, dopo che Salmon (*On the Classification of Curves of Double Curvature,* Cambridge Journ., 5, 1850), e Steiner (nella memoria *Ueber die Flächen dritten Grades,* Journ. f. Math., 53, 1856) avvertirono l'esistenza di due quartiche gobbe completamente differenti, si riconobbe che quel concetto non basta. Si credette che l'ordine assieme al numero dei punti doppî apparenti fosse sufficiente a caratterizzare una curva gobba; ma giunti al nono ordine si vide di avere errato. E un terzo numero — che Halphen indicò con la lettera n e che rappresenta l'ordine minimo dei coni passanti per le corde della curva che escono da un punto arbitrario dello spazio — potè servire allo scopo soltanto per le curve di ordine inferiore al quindicesimo. Allora si venne alla sconfortante conclusione di essere impossibile caratterizzare una curva gobba col mezzo di un complesso determinato di numeri assegnabili *a priori.*

A queste conclusioni, in gran parte negative, fa riscontro uno

(1) Cfr. a questo proposito L. Autonne, *Sur les représentations des courbes gauches algébriques et sur une formule d'Halphen* (C. R., 119, 1894).

(2) Kronecker, *Grundzgüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen,* § 10 (Journ. f. Math., 92, 1882).

(3) K. T. Vahlen, *Bemerkung zur vollständigen Darstellung algebraischen Raumcurven* (Journ. f. Math., 108, 1891).

splendido risultato positivo, che mezzo secolo fa ottenne il Cayley coll'estendere alle linee gobbe le relazioni che Plücker (Cap. II, n. 5) scoprì fra le caratteristiche di una curva piana (1). Questa memorabile scoperta si può avvicinare alle ricerche sulla singolarità delle curve gobbe che si leggono negli scritti seguenti: Spottinswoode, *Mémoire sur les points singuliers d'une courbe à double courbure* (Journ. f. Math., 42, 1851); Zeuthen, *Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable* (Ann. di Mat., II, 3, 1869-70); Halphen, *Sur les singularités des courbes gauches algébriques* (Bull. S. M. F., 6, 1878); C. F. E. Björling, *Om algebraiska rymdkurvors singularitater och polardeveloppabelns karakterer* (Stockh. Oefv., 1881); H. B. Fine, *On the Singularities of Curves of Double Curvature* (Am. Journ., 8, 1886); Poincarré, *Sur les transformations birationnelles des courbes algébriques* (C. R., 107, 1888) (2); Kluyver, *Kenmerkende getallen der algebraische ruimte-kromme* (Amsterdam Versl. en Meded., III, 7, 1890); Fr. Meyer, *Ueber Discriminanten und Resultanten der Gleichungen für Singularitäten von algebraischen Raumcurven, mit Anwendungen Gleichungen auf Realitätsverhältnisse* (Monatshefte, 4, 1893). In particolare dei punti stazionarî trattano, oltre la memoria di Hesse citata nel n. 7 del Cap. II: Bischoff, *Ueber die Wendungsberührebenen der Raumcurven* (Journ. f. Math., 58, 1861); Clebsch, *Sur la surface qui coupe la courbe d'intersection de deux surfaces algébriques données dans les points de contact des plans osculateurs stationnaires* (Journ. de Math., II,

(1) V. il *Mémoire sur les courbes à double côurbure et les surfaces développables* (Journ. de Math., 10, 1845; tradotto in inglese e pubblicato col titolo *On Curves of double Curvature and Developable Surfaces* nel t. 5, 1850, di Cambridge Journ.), ed inoltre la nota: *On the Theory of the Curves and Torses* (Quart. Journ., 11, 1871). Dalle formole di Cayley emerge che la figura polare reciproca della sviluppabile osculatrice alla curva d'intersezione di due superficie algebriche non è la completa intersezione di due superficie algebriche (Hossfeld, *Zur Theorie der Raumcurven*, Zeitschr. f. Math., 29, 1884) e che se di una curva gobba sono fra loro eguali una coppia di caratteristiche fra loro correlative, altrettanto accadrà per le altre coppie (G. Loria, *Sur les courbes gauches algébriques auto-corrélatives*, Bull. S. M. F. 22, 1895).

(2) È ivi provata la trasformabilità di ogni curva piana in altra sghemba senza alcuna singolarità, il che trovasi anche dimostrato in due note del Bertini e del Pieri che citammo nel n. 6 del Cap. II, e nella più recente del Pannelli *Sulla riduzione delle singolarità di una curva gobba*, Rend. Ist. Lomb., II, 26, 1893.

8, 1863), e *Ueber die Wendungsberührebenen der Raumcurven* (Journ. f. Math., 63, 1864).

Delle rette secanti più volte una curva gobba parlò incidentalmente il Cayley nella prima delle memorie *On Skew Surfaces otherwise Scrolls* (cfr. Cap. III, n. 9); di esse è trattato *ex-professo* nelle due memorie del Picquet (*Sur les courbes gauches algébriques* C. R., 77, 1873, e Bull. S. M. F., 1, 1875), e del Geiser (*Ueber die dreifachen Secanten einer algebraischen Raumcurve*, Coll. math., 1881; cfr. Berzolari, *Sulle secanti multiple di una curva algebrica dello spazio a tre od a quattro dimensioni*, Palermo Rend., 9, 1895); ad esse uniamo, benchè tratti una questione metrica, la nota del Pieri *Sulle normali doppie di una curva gobba algebrica* (Lincei Rend., IV, 2, 1886$_1$).

8. A curve gobbe in generale si riferiscono anche le *Études sur les courbes à double courbure tracées sur une surface algébrique d'ordre quelconque* (Ann. di Mat., 5, 1863) del de Jonquières, nonchè certe osservazioni intorno alla determinazione del genere delle curve fatte dal Cremona (v. N. Salvatore-Dino, *Sul genere delle curve gobbe*, Napoli Rend., 18, 1879) e da R. Sturm (*Ueber das Geschlecht von Curven auf Kegeln*, Math. Ann., 19, 1882), ed ancora l'interessante lavoro dell'Hurwitz intitolato: *Einige allgemeine Sätze über Raumcurven* (Math. Ann., 25, 1885; cfr. anche 27, 1886, ove sono citati dei lavori anteriori contenenti le medesime proposizioni), il *Teorema sulle curve gobbe* (Giorn. di Mat., 25, 1887) di A. Cantone, la memoria di F. Caspary, *Ueber die Erzeugung algebraischer Raumcurven durch veränderliche Figuren* (Journ. f. Math., 100, 1887) e quella di J. Sobotka intitolata *Beitrag zur Construction von Krümmungskugeln an Raumcurven* (Wiener Ber., 104, 1895).

Ma questi scritti, per quanto degni di onorevole menzione, non produssero un decisivo progresso nella teoria che ci occupa; potere che ebbero invece due memorie che furono ricompensate nel 1882 col premio Steiner dall'Accademia di Berlino; e ben la meritarono, chè trattando essi i problemi di determinare tutte le curve di dato ordine fra loro distinte, di assegnare quali curve algebriche si trovino su una data superficie algebrica, ed altri ancora di importanza non molto minore, devono considerarsi come i fondamenti di una teoria generale

delle curve non trascendenti dello spazio. Sono il *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques* dell'Halphen (Journ. Éc. pol., 52e cah., 1882), e il lavoro *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven* del Nöther (Berliner Abh., 1883; un lungo sunto se ne trova nel t. 93, 1882, del Journ. f. Math.).

Questi due lavori si intrecciano fra loro così strettamente, si compenetrano così intimamente, da rendere assai malagevole il discernere la parte che spetta ad ognuno dei citati geometri nella produzione dei risultati a cui entrambi pervennero; infatti se da un lato il Nöther potè far tesoro dei teoremi che negli anni 1870-73 l'Halphen fece conoscere in parecchie occasioni (*Mémoire sur les courbes gauches algébriques, Extrait,* C. R., 70, 1870; *Sur les courbes tracées sur les surfaces du second ordre,* Bull. S. M. F., 1, 1872; *Recherches de géométrie à* n *dimensions,* Id., 2, 1873; *Sur quelques propriétés des courbes gauches algébriques,* Ivi); dall' altro all' Halphen fu dato di usufruire della teoria delle funzioni algebriche di cui il Nöther fu uno dei fondatori e dei più fortunati cultori (cfr. Cap. II, n. 6). Nè si creda che le vie percorse dai due chiari geometri siano molto differenti, giacchè entrambi imitarono il Cayley nel rappresentare analiticamente le curve mediante superficie monoidi e se uno di essi adoperò di preferenza formole e proposizioni della dottrina delle funzioni abeliane, l'altro applicò quei teoremi delle funzioni algebriche che esprimono in sostanza le medesime proprietà (1). Gli scritti che seguirono le memorie coronate dall'Accademia di Berlino non sono molto numerosi; i più importanti sono forse quelli del Nöther *Ueber die reducibeln algebraischen Curven* (Acta, 8, 1886), del Bobek, *Ueber das Maximalgeschlecht von algebraischen Raumcurven gegebener Ordnung* (Wiener Ber., 93, 1886), e del Cayley, *On Halphen's Characteristic* n *in the Theory of Curves in Space* (Journ. f. Math., 111, 1893).

Giustizia vuole che venga qui fatto cenno delle ricerche di H. Valentiner che hanno colle precedenti molteplici punti di

(1) Però le superficie monoidi rappresentano nel metodo di Halphen una parte più importante che in quello di Nöther; in particolare gli è la considerazione di esse che guidò l'illustre geometra francese alla scoperta di un procedimento ingegnoso quanto originale per determinare l'ordine minimo delle superficie passanti per una data curva algebrica.

contatto, ma ne sono completamente indipendenti; esse vennero esposte nella dissertazione intitolata: *Bidrag til Rumcurvernes Theori* (Kjöbenhavn, 1881), e poi nella memoria *Zur Theorie der Raumcurven* (Acta, 2, 1883).

Nè va dimenticata una nota *Intorno alla geometria su una rigata algebrica* (Lincei Rend., IV, 3, 1887_2) del Segre destinata, fra l'altro, a dimostrare una formola da cui ricevono una notevole ed assai ampia generalizzazione i risultati ottenuti dallo Sturm in un articolo menzionato poco fa e dallo Story nella nota: *On the Number of Intersections of Curves Traced on a Scroll of any Order* (Hopkins Circ., 2, 1883); da ultimo vanno citate due note, una del Guccia, *Sur une question concernant les points singuliers des courbes gauches algébriques* (C. R., 120, 1895), ove è determinata la diminuzione che produce nel rango dell'intersezione di due superficie la presenza di un punto singolare per entrambe, l'altra del Küpper avente per iscopo la *Bestimmung des Maximalbasis B für eine irreducible μ-fache Mannigfaltigkeit von Curven n^{ter} Ordnung $\underset{\smile}{C}^n$* (Monatshefte, 6, 1895).

4. Da quanto precede risulta ad evidenza come la teoria generale delle curve sghembe sia un campo non ancora sufficientemente coltivato, epperò ben lungi dall'essere esaurito. Non esauriti ma assai più coltivati furono i campi di più modeste proporzioni rappresentati dalle indagini intorno a curve speciali; noi ora li percorreremo regolandoci nel nostro viaggio su criterî analoghi a quelli che abbiamo scelti occupandoci delle curve piane (v. Cap. II, n. 11). Laonde cominceremo parlando delle cubiche gobbe, cioè di quelle notevoli curve che rappresentano nella geometria dello spazio una parte analoga a quella delle coniche nella geometria del piano.

La teoria di queste curve raggiunse ai dì nostri un'invidiabile perfezione, frutto dei perseveranti sforzi dei più chiari geometri del nostro secolo. Primo fra questi Möbius che, nella grande sua opera *Der barycentrische Calcül* (Leipzig, 1827), applicando il metodo di geometria analitica che gli è proprio, riconobbe essere una conica il luogo delle traccie delle tangenti alla curva sopra un piano osculatore qualunque. A lui segue Chasles che alle curve di cui trattiamo dedicò la Nota 33ª dell'*Aperçu historique* e vent'anni dopo lo scritto: *Propriétés des courbes à double*

courbure du troisième ordre (C. R., 45, 1857; Journ de Math., II, 2); viene poi il Seydewitz, il quale colla memoria *Linear Construction einer Curve doppelter Krümmung* (Arch. der Math., 10, 1847) fece conoscere la generazione delle cubiche gobbe mediante stelle proiettive di raggi e propose una classificazione di esse che venne tosto accettata ed è tuttora adoperata. Intanto il Cayley aveva dimostrato che per ogni punto dello spazio passa una sola corda di una data cubica gobba (v. la nota intitolata: *Démonstration d'un théorème de M. Chasles,* Journ. de Math., 10, 1845). Nel 1859 apparve la memoria di Schröter, *Ueber die Raumcurven dritter Klasse und dritter Ordnung* (Journ. f. Math., 56) accompagnata da una *Bemerkung* del Joachimsthal; l'anno seguente le cubiche gobbe entrarono a far parte di una trattazione metodica della geometria proiettiva venendo studiate a fondo nel terzo dei *Beiträge zur Geometrie der Lage* di Staudt. Già prima il Cremona aveva cominciato a pubblicare i risultati delle memorabili sue investigazioni sul soggetto che ci occupa, come emerge dal seguente elenco di memorie a lui dovute: *Sulle linee di terzo ordine a doppia curvatura* (Ann. di Mat., 1, 1858, e 2, 1859), *Sulla proiezione iperboloidica di una cubica gobba* (Id., 5, 1863, e Giorn. di Mat., 2, 1864), *Sur quelques propriétés des lignes gauches de troisième ordre et classe* (Journ. f. Math., 58, 1861), *Sur les hyperboloïdes de rotation qui passent par une cubique gauche donnée* (Id., 63, 1864), *Propriétés de la cubique gauche* (Nouv. Ann., 19, 1860), *Mémoire de géométrie pure sur les cubiques gauches* (Id., II, 1, 1862), *Un teorema sulle cubiche gobbe* (Giorn. di Mat., 1, 1863), *Nuove ricerche di geometria pura sulle cubiche gobbe ed in ispecie sulla parabola gobba* (Bologna Mem., 3, 1863 e Giorn. di Mat., 2, 1864), *Sulle superficie e le curve che passano pei vertici d'infiniti poliedri formati da piani osculatori di una cubica gobba* (Rend. Ist. Lomb., II, 12, 1879).

Una esposizione delle principali proprietà delle curve in discorso si legge, oltrechè in *Die Geometrie der Lage* del Reye (1), nell'*Einleitung in die Theorie der kubischen Kegelschnitte*

---

(1) V. anche Reye, *Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnis der kubischen Raumcurven, übersichtlich dargestellt* (Hamburger Mitth., 2, 1890).

(Leipzig, 1871) del Drach (1) ed in un manuale già nominato (Cap. III, n. 6) dello Schröter, mentre molti importanti complementi alla teoria proiettiva delle medesime recarono i seguenti scritti: Em. Weyr, *Ueber den perspectivischen Zusammenhang der Raumcurven dritter Ordnung mit den ebenen Curven dritter Ordnung vierter Classe, und jener dritter Classe vierter Ordnung* (Prager Ber., 1869), e *Intorno alle cubiche gobbe* (Rend. Ist. Lomb., II, 4 1871); H. Müller, *Zur Geometrie auf den Flächen zweiter Ordnung* (Math. Ann., 1, 1869); Sturm, *Combien y a-t-il de sécantes communes à deux cubiques gauches?* (Ann. di Mat., II, 3, 1869-70), *Ergeugnisse, Elementarsysteme und Carackteristiken von cubischen Raumcurven* (Journ. f. Math., 79, 1875), e *Weitere Untersuchungen über kubische Raumkurven* (Id., 80, 1875); Voss, *Ueber vier Tangenten einer Raumcurven dritter Ordnung* (Math. Ann., 13, 1878); Hurwitz, *Beweis eines Satzes aus der Theorie der Raumcurven dritter Ordnung* (Id., 20, 1882); Guichard, *Application de la théorie des cubiques gauches* (Ann. Éc. norm., III, 3, 1886); Cantone, *Teoremi sulla cubica gobba* (Palermo Rend., 1, 1884-87), *Teoremi sulla cubica gobba, dedotti dallo studio di una trasformazione involutoria nello spazio* (Napoli Rend., 15, 1886), *Un teorema sopra la cubica gobba* (Giorn. di Mat., 25, 1887); Servais, *Sur lè système focal* (Belgique Mém., 52, 1895).

Di alcune proprietà metriche delle cubiche gobbe è discorso in una memoria già citata del Cremona (Journ. f. Math., 63) e in un'altra di Ed. Weyr (Rend. Ist. Lomb., 1871) pure dianzi nominata; altre sono esposte nelle note di L. Geisenheimer, *Ueber den Mittelpunkt der Raumcurven dritter Ordnung* (Zeitschr. f. Math., 27, 1882) e in quella posteriore del Valeri, *Proprietà metriche delle cubiche gobbe* (Mem. dell'Acc. di Modena, II, 8, 1893); ma le più numerose ed importanti si apprendono dalle due dissertazioni: H. Krüger, *Die Focaleigenschaften der cubischen Raumcurve* (Breslau, 1885), e E. Timerding, *Ueber die Kugeln, welche eine cubische Raumcurve mehrfach oder mehrpünktig berühren* (Strassburg, 1894), e dagli articoli seguenti: J. Sobotka *Construction der hyperosculierenden Kugeln der cubischen Raumcurven* (Monatshefte, 5, 1894); R. Mehmke, *Metrische Strahlen-*

(1) Cfr. Beltrami, *Annotazioni sulla teoria delle cubiche gobbe* (Rend. Ist. Lomb., II, 4, 1871).

congruenzen bei einer cubischen Raumcurven (Zeitschr. f. Math., 40, 1895), e R. Sturm, *Metrische Eigenschaften der cubischen Raumcurven* (Ivi): quelle e questi provano essere in Germania l'argomento in discorso attualmente di moda.

La teoria delle cubiche gobbe in due modi si può collegare alla teoria delle forme binarie; o coll'esprimere le coordinate omogenee de' suoi punti col mezzo di quattro forme binarie cubiche o col rappresentare su di esse una forma binaria di ordine assegnato ma arbitrario. Gli scritti principali in cui tali concetti sono esposti e sviluppati sono: Laguerre, *Sur la représentation des formes binaires dans le plan et dans l'espace* (Institut, 40, 1872); Appell, *Sur les propriétés des cubiques gauches et le mouvement hélicoïdal d'un corps solide* (Ann. Éc. norm., II, 5, 1876); J. Tannery, *Sur le plan osculateur aux cubiques gauches* (Bull. Sc. math., 11, 1876); d'Ovidio, *Studio sulle cubiche gobbe mediante la notazione simbolica delle forme binarie* (Torino Mem., II, 32, 1877; di questo lavoro, che è il più esteso e completo sull'argomento, il vol. 17 del Giorn. di Mat. contiene un sunto e la Coll. math. un complemento dal titolo *Nota sopra alcuni iperboloidi annessi alla cubica gobba*); Pittarelli, *La cubica gobba e le forme binarie quadratiche e cubiche* (Giorn. di Mat., 17, 1879); R. Sturm, *Darstellung binärer Formen auf der kubischen Raumcurve* (Journ. f. Math., 86, 1879); W. R. W. Roberts, *Geometrical Representation of a System of two Binary Cubics and their Associated Forms* (Proc. L. M. S., 13, 1883); Fr. Meyer, *Apolarität und rationale Curven* (Tübingen, 1883); Waelsch, *Ueber Formen 5ᵉʳ Ordnung auf der kubischen Raumcurven* (Wiener Ber., 100, 1891); e Berzolari, *Intorno alla rappresentazione delle forme binarie cubiche e biquadratiche sulla cubica gobba* (Palermo Rend., 5, 1891).

All'anzidetta memoria del d'Ovidio è strettamente collegata quella del Gerbaldi, *Sui sistemi di cubiche gobbe o di sviluppabili di terza classe stabiliti col mezzo di due cubiche punteggiate projettivamente* (Torino Mem., II, 32, 1879); al pari di essa trattano di sistemi di cubiche le seguenti: Montesano, *Su alcuni sistemi di cubiche gobbe* (Napoli, 1886); Cardinaal, *Ein specieller $F^{(2)}$-Bündel und der dazu gehörige Bündel Raumcurven dritter Ordnung* (Journ. f. Math., 101, 1887); Heinrichs, *Ueber den Bündel derjenigen kubischen Raumkurven welche ein gegebenes Tetraeder in*

derselben Art zum gemeinsamen Schmiegungstetraeder haben (Diss. Münster, 1887); Lelieuvre, *Sur certaines familles de cubiques gauches* (C. R., 117, 1893); K. Döhlemann, *Zur Theorie des Nullsystems* (Deutsch.-Math.-Ber., 3, 1892-93).

Da ultimo rileveremo che a cubiche gobbe metricamente specializzate (dal punto di vista projettivo sono tutte identiche tranne quelle degeneri (1)) si riferiscono le memorie seguenti: Cosentius, *Der kubische Kreis* (Zeitschr. f. Math., 25, 1880); Fr. Meyer, *Wann besitzt die kubische Parabel eine Directrix?* (Böklen Mitth., 1, 1884); Böklen, *Ueber die kubische Parabel mit Directrix* (Zeitschr. f. Math., 29, 1884); Schröter *Metrische Eigenschaften der cubischen Parabel* (*Raumcurve dritter Ordnung*) (Math. Ann., 25, 1885 ; cfr. G. Loria, *Su alcune proprietà metriche della cubica gobba osculatrice al piano all'infinito,* Napoli Rend., 24, 1885); Wirtinger, *Ueber die Brennpunktscurve der räumlichen Parabel* (Wiener Ber., 94, 1886); Hurwitz, *Ueber eine besondere Curve dritter Ordnung* (Math. Ann., 30, 1887) (2); Bioche, *Sur les cubiques gauches équilatères* (Proc. L. M. S., 13, 1884-95) (3).

5. Passiamo alle quartiche gobbe. Come si è già detto (n. 2) sono di due specie; per una curva di prima specie passano infinite superficie di second'ordine che costituiscono un fascio di cui la curva è la base, per una di seconda specie passa invece un'unica quadrica; quelle di prima specie sono ellittiche, quelle di seconda razionali. Il possedere le due specie di quartiche delle proprietà completamente diverse esige che le consideriamo a parte.

Delle quartiche di prima specie si può dire che si cominciò ad occuparsi sulla fine del secolo scorso quando il Fuss (*Problemata quorundam sphaericorum solutio,* Nova Acta Petrop., 2, 1788; *De proprietatibus quibusdam ellipseos in superficie sphaerica descriptae,* Id., 3, 1788) e F. T. Schubert (1758-1825) (*Problemata ex doctrina sphaerica,* Id., 12, 1801) studiarono le intersezioni di una sfera con un cono quàdrico concentrico: sono

---

(1) H. Schubert, *Beschreibung der Ausartungen der Raumcurven dritter Ordnung* (Math. Ann., 15, 1879).

(2) Questa curva ha due punti sul cerchio immaginario all'infinito.

(3) Sono cubiche gobbe aventi tre asintoti reali a due a due ortogonali.

queste le " coniche sferiche „ le cui proprietà scaturiscono da quelle dei coni quàdrici e che vennero stabilite ed esposte per la maggior parte, oltrechè dal Magnus (*Théorèmes sur l'hiperboloïde à une nappe et sur les surfaces coniques du second ordre*, Ann. de Math., 16, 1825-26), da Chasles (*Mémoire sur les propriétés générales des coniques sphériques*, Belgique Mém., 6, 1831; *Résumé d'une théorie des coniques sphériques homofocales*, C. R., 50, 1860), dal Gudermann (1798-1852) (*Ueber die analytische Sphärik*, Journ. f. Math., 6, 1830), dal Cremona (*Sur les coniques sphériques*, Nouv. Ann., 19, 1860), dal Cayley (*On a Theorem relating to Spherical Conics*, Quart. Journ., 3, 1860; *On the Stereographic Projection of the Spherical Conics*, Phil. Mag., 25, 1863) e dal Vogt (*Der sphärische Kegelschnitt*, Breslau, 1873).

Ma la teoria generale delle curve di 4° ordine e 1ª specie si può ritenere che cominci dalla scoperta fatta da Poncelet dei quattro coni quàdrici che passano per la curva (v. Cap. I, n. 12). Ad essa ne tennero dietro altre per opera di coloro che si occuparono di sistemi di quàdriche, in particolare per merito di Chasles (*Description par points, d'une manière uniforme, des deux courbes gauches du quatrième ordre, de la courbe à nœud et de la courbe du troisième ordre*, C. R., 52, 1861, e *Propriétés des courbes gauches du quatrième ordre de première espèce*, Id., 54, 1864), di Staudt e Reye (si veggano i trattati che tante volte citammo), di P. Serret (*Géométrie de direction*, Paris, 1869, e *Note sur les courbes gauches du quatrième ordre*, C. R., 82, 1876), del Laguerre (*Sur les courbes gauches résultant de l'intersection de deux surfaces du second ordre*, L' Institut, 36, 1868, e *Sur un problème de géométrie relatif aux courbes gauches du quatrième ordre*, Journ. de Math., II, 15, 1870), del Milinowski (*Zur Theorie der Raumcurven vierter Ordnung erster Art*, Journ. f. Math., 97, 1884), dell'Ameseder (*Ueber Configurationen auf der Raumcurve vierter Ordnung erster Species*, Wiener Ber., 87, 1883), dell'Eberhard (*Die Raumkurven vierter Ordnung erster und zweiter Species in ihrem Zusammenhang mit den Steiners'schen Schliessungsproblemen bei den ebenen Kurven dritter Ordnung*, Zeitschr. f. Math., 32, 1887), e del Toeplitz, *Zur Theorie der Wendeberührungspunkte der Raumkurve vierter Ordnung erster Species* (Breslau, 1895).

Le curve in discorso somministrano delle applicazioni eleganti e di grande valore alla teoria delle funzioni uniformi con due

periodi, come si apprende da molti lavori, di cui ci limiteremo a rammentare i seguenti: Killing, *Der Flächenbüschel zweiter Ordnung* (Diss. Berlin, 1872); Harnack, *Ueber die Darstellung der Raumcurve vierter Ordnung erster Species und ihres Secantensystems durch doppelt periodische Functionen* (Math. Ann., 12, 1877), e *Notiz über die algebraische Parameterdarstellung der Schnittcurve zweier Flächen 2ter Ordnung* (Id., 15, 1879); Westphal, *Ueber das symultane Systhem zweier quaternären Formen 2en Grades und eine allgemeine Parameterdarstellung der Raumcurve 4er Ordnung* p = 1 (Id., 13, 1878); Lange, *Die sechszehn Wendeberührungspunkte einer Raumcurve vierter Ordnung erster Species* (Zeitschr. f. Math., 28, 1883); Cayley, *On the Quadriquadric Curve in Connexion with the Theory of Elliptic Functions* (Math. Ann., 25, 1885); Léauté, *Représentation des fonctions elliptiques de première espèce à l'aide des biquadratiques gauches* (C. R., 82, 1876), e *Études géométriques sur les fonctions elliptiques de première espèce* (Journ. Éc. pol., 66, 1879); G. Loria, *Sull'applicazione delle funzioni Jacobiane allo studio delle linee sghembe di quarto ordine e prima specie* (Lincei Rend., IV, 6, 1890_1), e *Le funzioni σ di Weierstrass e le curve di genere 1* (Giorn. di Mat., 31, 1893); Kluyver, *Over de buigraaklijnen eener ruimte-kromme van den vierden graad en de eerste soort* (Amsterdam Versl., III, 8, 1891); Valyi, *Ueber die Raumcurven vierter Ordnung von ersten Geschlechte* (Math. und naturwiss. Ber. aus Ungarn, 10, 1893).

Alcune quartiche gobbe elittiche che, al pari delle coniche sferiche, sono specializzate dal punto di vista della geometria metrica, fornirono l'argomento a pregevoli memorie, delle quali dobbiamo scriver qui almeno i titoli: Darboux, *Théorèmes sur l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré* (Nouv. Ann., II, 3, 1864); Laguerre, *Sur la courbe résultant de l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré* (Bull. Sc. math., 4, 1867) e *Sur les cassiniennes planes et sphériques* (Id., 5, 1868); Schröter, *Ueber eine Raumcurve vierter Ordnung erster Species* (Journ. f. Math., 93, 1882). Una esposizione sintetica metodica delle proprietà comuni a tutte le curve in questione è contenuta, oltrechè nelle opere di Staudt e del Reye sopra *Die Geometrie der Lage*, nel pregevole opuscolo dello Schröter intitolato *Grundzüge einer rein geometrischer Theorie der Raumcurven vierter Ordnung erster Species* (Leipzig, 1890).

6. Una fisonomia spiccatamente differente da quella che ha la collezione di memorie intorno alle quartiche di prima specie possiede l'insieme degli studi intorno alle quartiche di seconda specie; come anello di congiunzione fra le due serie fungono le scritture sulle quartiche sghembe con punto doppio o cuspide, curve che l'analista preferisce di considerare come appartenenti alla seconda specie per trarre profitto dalla circostanza che esse sono razionali.

Prescindendo dalle memorie di Steiner e Salmon (v. n. 2), la letteratura intorno alle quartiche generali di seconda specie si apre, se non erriamo, con la memoria di Cremona *Intorno alla curva gobba del quart'ordine per la quale passa una sola superficie di secondo grado* (Ann. di Mat., 4, 1861). Essa abbraccia, oltre ad uno scritto di Chasles inserito t. 52 dei C. R., e che nominammo nel n. prec., molti lavori di Em. Weyr, cioè i seguenti: *Ueber rationale Raumcurven vierter Ordnung* (Wiener Ber., 63, 1871, e Math. Ann., 4, 1871), *Ueber Raumcurven vierter Ordnung mit einem Cuspidalpunkt* (Wiener Ber., 71, 1875), *Ueber die Abbildung einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung auf einem Kegelschnitt* (Id., 72, 1875), *Weitere Bemerkungen über die Abbildung etc.* (Id., 73, 1876), *Ueber die Abbildung einer mit einem Cuspidalpunkt versehenen Raumcurve vierter Ordnung auf einem Kegelschnitt* (Id., 78, 1878), *Ueber die Abbildung einer Raumcurve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt auf einen Kegelschnitt* (Ivi), *Ueber Curven vierter Ordnung* (Prager Ber., 1875). Nella collezione di lavori sulle quartiche gobbe razionali, incontriamo ancora quello importantissimo del Bertini *Sulla curva gobba di 4° ordine e di 2ª specie* (Rend. Ist. Lomb., II, 5, 1872), ove va notato il concetto di " corda principale ", cioè di retta che è ad un tempo congiungente di due punti di una curva ed intersezione dei piani osculatori negli estremi, e l'altro di A. Armenante *Sulle curve razionali gobbe del quarto ordine* (Giorn. di Mat., 11, 1873, e 12, 1874); poi, in ordine cronologico, i seguenti: R. Sturm, *Sur la surface enveloppée par les plans qui coupent une courbe gauche du 4ᵉ ordre et de la 2ᵉ espèce en quatre points d'un cercle* (Ann. di Mat., II, 4, 1870-71); Adler, *Ueber Raumcurven vierter Ordnung zweiter Species* (Wiener Ber., 86, 1882); R. A. Roberts, *On Unicursal Twisted Quartics* (Proc. L. M. S., 14, 1883); Jolles, *Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species synthetisch behandelt*

(Diss. Strassburg, 1883) e *Die Theorie der Osculanten und des Sehnensystems der Raumcurve IV Ordnung II Species* (Aachen, 1886); Brambilla, *Sulle curve gobbe del quarto ordine dotate di punto doppio* (Rend. Ist. Lomb., II, 17, 1884), *Le omografie che mutano in sè stessa una curva gobba razionale del quarto ordine* (Id., 20, 1887) e *Ricerche analitiche intorno alle curve gobbe razionali del 4° ordine* (Atti Ist. Ven., VI, 3, 1885); E. Study, *Ueber die Raumcurven vierter Ordnung, zweiter Art* (Leipziger Ber., 38, 1886); W. Stahl, *Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art und die desmische Fläche zwölfter Ordnung vierter Klasse* (Journ. f. Math., 101, 1887); Fr. Meyer, *Ueber die mit der Erzeugung der Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species verknüpften algebraischen Processe* (Math. Ann., 29, 1887); Rohn, *Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species* (Leipziger Ber., 42, 1890, e 43, 1891); Berzolari, *Sulla curva gobba razionale del quarto ordine* (Rend. Ist. Lomb., II, 23, 1890), *Sopra alcuni iperboloidi annessi alla curva gobba razionale del quart'ordine* (Id., 25, 1892) e *Sui combinanti dei sistemi di forme binarie annessi alle curve gobbe razionali del quarto ordine* (Ann. di Mat., II, 20, 1892); Forsyth, *On Twisted Quartics of the Second Species* (Quart. Journ., 27, 1895).

Fra le quartiche di 2ª specie ve n'ha una che attrasse in particolar modo l'attenzione dei geometri: è quella che possiede due tangenti stazionarie; essa trovasi studiata nei lavori seguenti: Cremona, *Sopra una certa curva gobba di quart'ordine* (Rend. Ist. Lomb., II, 1, 1868); Em. Weyr, *Sopra una certa curva gobba di quart'ordine* (Ivi); Appell, *Sur une classe particulière de courbes gauches unicursales du quatrième ordre* (C. R., 83, 1876); Brambilla, *Sopra alcuni casi particolari della curva gobba razionale del quarto ordine* (Napoli Rend., 24, 1885); del Re, *Omografie che mutano in sè stessa una certa curva gobba del 4° ordine e 2ª specie e correlazioni che la mutano nella sviluppabile dei suoi piani osculatori* (Torino Atti, 22, 1887), *Correlazioni che mutano la quartica gobba con due flessi nella sviluppabile dei suoi piani bitangenti* (Napoli Rend., II, 1, 1887), e *Su certi sistemi di quartiche e sestiche sviluppabili che si presentano a proposito delle trasformazioni lineari di una certa quartica gobba in sè stessa* (Id., 2, 1885).

7. Le nozioni che possediamo intorno alle curve gobbe di

ordine superiore al quarto sono frammentarie e non molto numerose. Delle curve di 5° ordine furono studiate le razionali dal Bertini (*Sulle curve gobbe razionali del 5° ordine,* Coll. math., 1881) e dal Berzolari (*Sulla curva gobba razionale del quint'ordine,* Lincei Mem., IV, 7, 1893) e le ellittiche da Em. Weyr (*Ueber Raumcurven fünfter Ordnung vom Geschlechte Eins,* Wiener Ber., 90, 1884; 92, 1885; 97, 1888) e dal Montesano (*Su la curva gobba di 5° ordine e di genere 1,* Napoli Rend., II, 2, 1888). Di curve di 6° ordine si occuparono in generale A. Baule nella Diss. *Ueber Raumcurven sechster Ordnung* (Göttingen, 1872) ed Ed. Weyr nella sua *Classification des courbes du sixième ordre dans l'espace* (C. R., 76, 1873), ed in particolare il London nell'articolo *Die Raumcurve sechster Ordnung von Geschlechte 1 als Erzeugniss trilinearer Grundgebilde* (Math. Ann., 45, 1894), A. Petot in quello intitolato *Construction de la courbe gauche du sixième ordre et du premier genre* (C. R., 102, 1886) ed E. Pascal nelle note *Sulla configurazione dei 120 piani tritangenti della sestica storta di genere 4* (Lincei Rend., V, 2, 1893_1) e *Sui piani tritangenti della sestica storta di genere 4* (Ivi). Quanto alle curve di 7° ordine, la loro classificazione si legge nella nota di Ed. Weyr *Ueber Raumcurven siebenter Ordnung* (Wiener Ber., 69, 1874). Ci sembra opportuno di richiamare qui ancora i già citati studì intorno alle curve simmetriche rispetto ad un tetraedro (v. Cap. II, n. 15) e quelli dell'Eckardt sopra altre curve speciali (v. Cap. III, n. 7), ed ancora di rilevare come quelle curve particolari i cui punti stanno su una superficie di secondo ordine ed i cui piani osculatori toccano una superficie di seconda classe siano trattate nel notevole articolo di W. Stahl, *Ueber eine gewisse Gattung von Raumcurven* (Journ. f. Math., 99, 1886); ad una nuova categoria è consacrato quello di K. Bobek *Ueber Raumcurven m^ter Ordnung mit* (m - 2)*-fachen Secanten* (Wiener Ber., 95, 1887); ad una terza quello dello Steinmetz *On the Curves which are Selfreciprocal in a Linear Nulsystem, and their Configuration in Space* (Am. Journ., 14, 1892); ad un'altra, a quella cioè composta delle curve che ammettono infinite trasformazioni infinitesime in sè stesse, l'articolo di Klein e Lie, *Sur une certaine classe de courbes et de surfaces algébriques* (C. R., 70, 1870) e la memoria del Pittarelli sopra *I gruppi continui projettivi semplicemente infiniti nello spazio ordinario* (Ann. di Mat., II, 22, 1894).

Con ciò non crediamo di avere esaurito gli scritti intorno alle curve sghembe particolari, ma

Degli altri fià laudabile il tacerci
Chè il tempo saria corto a tanto suono.

8. Chiuderemo questo Cap. coll'indicare i principali lavori in cui sono studiate le curve razionali, non senza osservare come di molti degli scritti che citammo parlando delle curve piane di genere determinato (Cap. II, n. 13) debba tener conto anche chi si occupa delle curve a doppia curvatura, la nozione di genere essendo una di quelle che affratellano le linee piane alle linee sghembe.

Chi forse più di qualunque altro studiò le proprietà projettive e metriche delle curve gobbe razionali è Em. Weyr di cui vanno qui ricordati i lavori seguenti: *Intorno alle curve gobbe razionali* (Giorn. di Mat., 9, 1871), *Nota sopra alcune singolarità di second'ordine delle curve gobbe razionali* (Ann. di Mat., II, 4, 1870-71), *Ueber rationale Raumcurven* (Zeitschr. f. Math., 16, 1871), *Ueber die Anzahl der Doppelnormalen einer rationalen Raumcurve* (Journ. f. Math., 74, 1872), *Ueber Normalen rationaler Raumcurven* (Ivi), *Sulle curve gobbe razionali* (Rend. Ist. Lomb., II, 15, 1882), e *Ueber rationalen Raumcurven* (Prager Ber., 1883) (1). A lui si uniscono A. Brill per le due memorie *Ueber die Doppelpunkte von Curven im Raume, deren Geschlecht Null ist* (Math. Ann., 3, 1871) e *Ueber rationale Curve und Regelfläche* (Id., 36, 1890), il Körndörfer per l'articolo *Ueber diejenigen Raumcurven, deren Coordinaten sich als rationale Functionen eines Parameters darstellen* (Id., 3, 1871) e W. Stahl pei due lavori di capitale importanza *Ueber die Fundamentalinvolutionen auf rationalen Curven* (Journ. f. Math., 104, 1889) e *Zur Theorie der rationalen Raumcurven* (Math. Ann., 40, 1892). Citeremo da ultimo i tre lavori seguenti: Saltel, *Sur les courbes gauches du genre zéro* (C. R., 80, 1875); Genty, *Sur les courbes gauches unicursales* (Bull. S. M. F., 9, 1881), R. A. Roberts, *On Unicursal Curves* (Proc. L. M. S., 17, 1885), nei quali sono considerate da varî punti di vista le curve di genere zero.

(1) Aggiungiamo a questi il lavoro dello stesso geometra, redatto da E. Czuber e pubblicato nei Wiener Ber, 103, 1894, col titolo *Ueber einen symbolischen Calcul auf Trägern vom Geschlechte Eins und seine Anwendung.*

Nell'assistere all'enumerazione di tante e così svariate ricerche quale è quella fatta nel Cap. presente e nei due che lo precedono, il lettore inesperto si sentirà compreso da un senso di sgomento e, quasi smarrito, si domanderà come in breve volgere di tempo sia possibile apprenderne, se non tutti, almeno i più cospicui risultati. Si rassicuri. Il còmpito dello studioso è oggi molto meno arduo di quello che potrebbe apparire assistendo alla rivista che andiamo facendo, giacchè i princìpî stabiliti dai geometri della prima metà del secolo nostro sono tanto fecondi che, quando uno se ne sia impadronito, non solo è in grado di far sue senza difficoltà molte ricerche posteriori, ma può eziandio ragionevolmente nutrir la speranza di far progredire la scienza. E questa, che è una delle prerogative più altamente apprezzabili della scienza attuale e non era posseduta dalla scienza dei nostri proavi, venne additata da uno dei fondatori dall'odierna geometria colle frasi, divenute omai classiche: " peut donc qui voudra, dans l'état actuel de la science, généraliser et créer en géométrie: le génie n'est plus indispensable pour ajouter une pierre à l'édifice „ (1). Sono queste auree parole che chiunque si dedica alla geometria deve scolpirsi nella mente; chè desse, facendogli nutrire la fede in una possibile vittoria, lo sosterranno nell'affrontare animosamente le lotte intellettuali che oggi attendono i ricercatori delle verità geometriche.

---

(1) Chasles, *Aperçu historique etc.*, 2ª éd., p. 269.

CAPITOLO V.

Geometria differenziale.

1. Le ricerche di pertinenza della Geometria differenziale differiscono da quelle su cui c'intrattenemmo nei tre Capitoli precedenti tanto pel continuo intervento di considerazioni infinitesimali, quanto per avere i loro risultati, generalmente parlando, quale campo di applicabilità non un'intera curva od un'intera superficie, ma soltanto l'insieme de' punti situati nelle vicinanze di quello su cui si ragiona, onde a fondamento di tali investigazioni non vi è, come negli studî esaminati nelle pagine antecedenti, l'ipotesi che l'ente geometrico considerato sia algebrico. La Geometria differenziale viene comunemente studiata col sussidio delle coordinate, ma può anche svolgersi indipendentemente da tale strumento. Essa ha delle diramazioni in ogni capitolo della geometria generale; per ciò penetra nella teoria delle curve piane quanto in quella delle curve gobbe e delle superficie, nè le è precluso l'adito nel dominio della geometria della retta e nel regno delle trasformazioni geometriche, come vedremo a miglior tempo. All'analisi essa suggerì una miriade di problemi la cui soluzione fu tormento e gloria di molti eminenti scienziati.

Scendendo ora a qualche maggiore particolare, osserveremo che la Geometria differenziale delle curve piane, non essendo in gran parte costituita che dalle più immediate applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, è conosciuta a chiunque abbia varcati i confini della matematica elementare, onde ci crediamo in diritto di non arrestarci a descriverne la struttura e di rimandare il lettore alle molte buone esposizioni che ne possediamo (1); ma alla planimetria differenziale appartengono eziandio

---

(1) V. ad es.: Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes planes* (Paris, 1873).

le indagini assai più ardue intorno alle curve il cui arco si può esprimere col mezzo di funzioni di natura prestabilita (razionali, circolari, ellittiche, ecc.) (1), nonchè quelle che s' informano ai concetti esposti nel *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle* del Poincarré (Journ. de Math., III, 6 1881, e 7, 1882 (2)); e noi stimiamo opportuno di escluderle dal nostro racconto perchè esse, nei mezzi e nel fine, si accostano a quelle che somministrano agli analisti il loro quotidiano lavoro. Volgiamoci piuttosto a dir qualche cosa delle curve sghembe, per poi passare alle superficie.

2. Già due volte si è detto (Cap. I, n. 11 e Cap. IV, n. 1) come, ammessa la possibilità di far risalire ad un sol uomo la creazione di un'intera teoria, alle origini della dottrina delle curve sghembe sia forza associare il nome di Clairaut, il quale a tale teoria dedicò nel 1731 un eccellente lavoro. Questo celebre geometra fu seguìto a qualche distanza da parecchi suoi valorosi conterranei di cui dobbiamo far qui menzione.

Primo fra questi è Monge, autore di un *Mémoire sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexion des courbes à double courbure* (Mém. Sav. Étr., 10, 1785) e di uno scritto più recente intitolato *Des courbes à double courbure* (Journ. Éc. pol., 2, 1799). Incontriamo circa nella stessa epoca il Tinseau, il quale nella memoria intitolata *Solutions de quelques problèmes relatifs à la théorie des surfaces courbes* (Mém. Sav. Étr., 9, 1781) ha, fra l'altro, introdotte le fondamentali nozioni di " piano osculatore " di una linea gobba e di " sviluppabile osculatrice " di essa. Come terzo in ordine di tempo ci si presenta il Lancret (1774-1807), al quale siamo debitori di un *Mémoire sur les courbes à double courbure* (Mém. prés., 1, 1806) e di un *Mémoire sur les développoïdes des courbes planes, des courbes à double courbure et des surfaces développables* (Id., 2, 1811) (3), nelle quali

(1) Cfr. ad es.: Serret, *Mémoire sur les courbes algébriques dont les arcs s'expriment par des arcs de cercle* (Journ. Éc. pol., 35ᵉ cah., 1853); Allégret, *Mémoire sur la représentation des transcendants par des arcs de courbes* (Ann. Éc. norm., II, 2, 1873); ecc.

(2) V. anche Picard, *Traité d'analgse*, T. 3 (Paris, 1895), Chap. IX e X.

(3) Cfr.: Brioschi, *Intorno le sviluppoidi e le sviluppate* (Tortolini Ann., 4, 1853); Beltrami, *Sulla teoria delle sviluppoidi e delle sviluppanti* (Ann. di Mat., 4, 1861).

vanno notati il concetto ed il nome di “ piano rettificante „, mentre il concetto ed il nome di “ binormale „ si apprendono dal *Mémoire sur les lignes courbes non planes* (Journ. Éc. pol., 30e cah., 1845) del Saint-Venant (1797-1886) (1).

Un importante progresso nella teoria che ci occupa è rappresentato dalla scoperta delle espressioni delle derivate rispetto all'arco di una curva gobba dei nove coseni di direzione della tangente, della normale principale e della binormale, in funzione, dei coseni stessi, dell'arco della curva, nonchè dei raggi di prima e seconda curvatura. A tali relazioni arrivarono, indipendentemente l'uno dall'altro, F. Frenet (2) e A. Serret (3), epperò è giustizia chiamarle, come ora è costume, “ formole di Frenet-Serret „ (4).

Senza abbandonare la Francia, troviamo ancora fra i cultori della teoria che attualmente ci occupa Ossian Bonnet (1819-1892) che va qui ricordato per la *Note sur quelques propriétés des courbes gauches* (Nouv. Ann., 12, 1853) (5), il Bouquet (1819-1885) per la *Note sur la distance de deux tangentes infiniment voisines à une courbe gauche* (Ivi), ed il Bertrand pel *Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure* (Journ. de Math., 15, 1850), dal quale ultimo scritto, assieme ad altre cose, si apprende l'esistenza di una classe assai notevole di curve (la cui ricerca fu suggerita dal Saint-Venant nella precitata memoria) (6) caratterizzate dalla proprietà che le loro nor-

(1) Notiamo qui di passaggio che, per misurare la curvatura di una linea gobba in un suo punto, l'Olivier (1793-1853) suggerì l'uso di un'elica osculatrice (*Sur la courbure et la flexion d' une courbe à double courbure*, Journ. Éc. pol., 24e cah., 1835), mentre W. R. Hamilton sostenne doversi accordare la preferenza ad una cubica gobba avente colla data curva nel punto considerato un contatto di quint'ordine (*Elements of Quaternions*, Dublin, 1866).

(2) V. la tesi, presentata per la laurea alla Facoltà delle Scienze di Tolosa il 10 luglio 1847, *Sur les courbes à double courbure*, ed inserita nel Journ. de Math., 17, 1852.

(3) *Mémoire sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure* (Id., 16, 1851), a cui fa seguito il *Mémoire sur une classe d'équations différentielles qui se rattachent à la théorie des lignes à double courbure* (Id., 18, 1853).

(4) Ad esse si riferiscono le seguenti note recenti: Stolz, *Zur Theorie Raumcurven* (Monatshefte, 1, 1890); Pomey, *Démonstration des formules de Frenet* (Nouv. Ann., III, 9, 1890); Kneser, *Bemerkungen über die Frenet-Serret'schen Formeln und die analytische Unterscheidung rechts und links gewundenen Raumcurven* (Journ. f. Math., 113, 1893); Stande, *Ueber den Sinn der Vindung in den singulären Puncten einer Raumcurve* (Am. Journ., 17, 1895).

(5) I teoremi ivi enunciati furono dimostrati dal Frenet nell'articolo intitolato *Théorèmes sur les courbes gauches* (Nouv. Ann., 12, 1853).

(6) Tale ricerca venne notevolmente generalizzata nella nota del Balitrand intitolata *Un problème sur le courbes gauches* (Mathésis, II, 4, 1894).

mali principali sono tali anche per una seconda curva; sono le così dette " curve di Bertrand ", dotate della proprietà in ogni punto torsione $\left(\frac{1}{r}\right)$ e flessione $\left(\frac{1}{\rho}\right)$ sono legate da una relazione lineare, e di altre qualità che scoprirono O. Bonnet (*Sur la théorie générale des surfaces,* Journ. Éc. pol., 32ᵉ cah., 1848), A. Serret (*Sur un problème relatif aux courbes à double courbure,* Journ. de Math., 16, 1851; *Condition pour que les normales principales d'une courbe soient normales principales d'une seconde courbe,* C. R., 75, 1877), ed altri (1). Al Bertrand si deve anche un'elegante dimostrazione geometrica del teorema, scoperto dal Puiseux (v. l'articolo intitolato *Problème de géométrie,* Journ. de Math., 7, 1842), che dice: " una curva di cui sono costanti le due curvature è un'elica situata sopra un cilindro rotondo ", nonchè la notevolissima generalizzazione di esso espressa dalla proposizione: " una curva per cui è costante il rapporto delle due curvature è un'elica tracciata sopra un cilindro " (v. la nota *Sur les courbes dont les deux courbures sont constantes,* Id., 8, 1843) (2).

In Germania la geometria infinitesimale delle curve gobbe attirò su di sè l'attenzione di Jacobi che dedicò ad essa l'ar-

---

(1) Voizot, *Note sur la théorie des courbes à double courbure* (Journ. de Math., 15, 1850); Curtis, *Sur les surfaces engendrées par les normales principales d'une courbe à double courbure* (Id., II, 1, 1856); Nievenglowski, *Note sur les courbes qui ont les mêmes normales principales* (C. R., 75, 1877); Fais, *Nota intorno alle curve gobbe aventi le stesse normali principali* (Bologna Mem., III, 8, 1877) e *Intorno ad alcune proprietà delle curve gobbe aventi le stesse normali principali* (Id., 9, 1878); Rouquet, *Application des formules générales de la théorie des courbes gauches à l'étude des courbes de M. Bertrand* (Mém. de l'Acad. de Toulouse, IX, 4, 1892); Cesàro, *Sulle curve di Bertrand* (Riv. di Mat., 2, 1892) e *Nouvelle propriété caractéristique des courbes de Bertrand* (Mathésis, II, 4, 1894).

A curve più generali di quelle di Bertrand è consacrata la nota del Demoulin *Sur une classe particulière de courbes gauches* (Bull. S. M. F., 21, 1893); le curve ivi studiate hanno un'equazione intrinseca della forma $\frac{A}{\rho}+\frac{B}{\rho r}+\frac{C}{\rho^2}+\frac{D}{r^2}=0$, onde per $D=0$ coincidono con quelle di Bertrand. Per converso ad una classe speciale di curve di Bertrand è consacrata la nota di H. Molins, *Sur une famille de courbes gauches dont la courbure et la torsion sont liées par une relation linéaire et dont les coordonnées s'expriment sous forme finie et explicite* (Mém. de l'Acad. de Toulouse, IX, 6, 1894).

(2) Cfr. anche la prima delle note di Liouville alla 5ª ed. (Paris, 1850) dell'*Application de l'Analyse à la Géométrie par Monge*, e l'articolo dello Zeuthen, *Vindskjove Kurver mend konstant Forhold mellem Krumningsradius og Torsionsradius* (Tidsskrift, III, 5, 1875).

ticolo *Zur Theorie der Curven* (Journ. f. Math., 14, 1835) e la *Nota de erroribus quibusdam geometricis, qui in theoria functionum leguntur* (Id., 16, 1837) (1); in tempi più prossimi a noi se ne occupò con perseveranza e ottimo successo R. Hoppe, del quale vanno anzitutto ricordati i lavori sulla " geometria intrinseca delle curve „ (2); di cui i più antichi sono le note *Ueber die Darstellung der Curven durch Krümmung und Torsion* (Journ. f. Math., 60, 1862; 63, 1864), mentre i più recenti sono le memorie seguenti: *Ueber die Bestimmung der Curven durch die Relation zwischen Krümmungs-und Torsionswinkel* (Arch. der Math., 65, 1880), *Reinanalytisch Consequenzen der Curventheorie* (Id., II, 2, 1885), *Zum Molins'schene Problem* (3) (Ivi), *Zur Bestimmung der Curven durch die Relation zwischen Krümmungs und Torsionswinkel* (Id., 8, 1889), e *Zur Goursat'sche Reduction des Problems der Bestimmung der Curven durch die Relation zwischen Krümmungs-und Torsionswinkel* (Id., II, 9, 1890) (4). Altre questioni furono trattate dallo stesso geometra nelle note: *Ueber die Bedingung unter welcher eine variabele Gerade Hauptnormale einer Curve sein kann* (Id., 63, 1879); *Das Aoust'sche Problem in der Curventheorie* (Id., 66, 1881); *Ueber ein Problem der Curventheorie* (Id., II, 1, 1884); *Erweiterung des Aoust'schen Problems der Curventheorie* (Id., 2, 1885) (5).

3. Fra gli altri scritti che concernono le proprietà infinitesimali delle curve gobbe vanno ancora ricordati i tre seguenti del Molins: *Sur les trajectoires qui coupent sous un angle donné les tangentes à une courbe à double courbure* (Journ. de Math.,

---

(1) L'errore ivi corretto fu commesso da Lagrange nella sua *Théorie des fonctions analytiques* (Paris, 1813; pp. 248-249).

(2) Come è noto, sotto tal nome si comprende lo studio di una curva rappresentata da due equazioni fra l'arco ed i due raggi di curvatura, equazioni che bastano a definirla completamente, a meno di movimenti dello spazio.

(3) Cfr. H. Molins, *De la détermination sous forme intégrale des courbes gauches dont le rayon de courbure et le rayon de la sphère osculatrice sont liés par une relation quelconque* (Journ. de Math., II, 19, 1874 e Mém. de l'Acad. de Toulouse, VIII, 5, 1883).

(4) Goursat, *Sur un problème relatif aux courbes à double courbure* (Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse, I, 1887).

(5) Questa e l'antiprecedente furono provocate dalla memoria dell'Aoust intitolata *Intégrales des courbes dont les développantes par le plan et les développées par le plan sont égales entre elles* (Bull. S. M. F., 7, 1879).

8, 1843), *Note sur les courbes dont les plans osculateurs font un angle constant avec une surface développable sur laquelle elles sont tracées* (Id., 12, 1847) e *De la surface développable passant par une courbe donnée quelconque, et qui, par son développement, transformeràit cette courbe en un arc de cercle de rayon donné* (Id., II, 1, 1856); poi la *Deuxième note sur les courbes à double courbure* (Id., 17, 1852) del Voizot, la memoria del Curtis *Sur la surface engendrée par les normales principales d'une courbe à double courbure* (Journ. de Math., II, 1, 1856), la *Nota sopra due proposizioni di Navier intorno alla curvatura delle linee a doppia curvatura* (Ann. di Mat., 3, 1860) di F. Chiò (1813-1871) (1), l'articolo del Dini *Su alcune proprietà delle superficie gobbe delle normali principali di una curva* (Giorn. di Mat., 3, 1865), e quella del Beltrami che tratta *Di una proprietà delle linee a doppia curvatura* (Id., 5, 1867), i due scritti dell'Aoust *Sur l'analyse des courbes rapportées à un système quelconque de coordonnées* (Ann. Éc. norm., 6, 1869) e *Intégrales des équations différentielles des courbes qui ont une même surface polaire* (Ann. di Mat., II, 7, 1875), la *Détermination des éléments infinitésimaux relatifs aux lignes à double courbure* (Nouv. Ann., II, 12, 1873) del Saint-Germain, la *Note sur la transformation des courbes* del Niewenglowski (Ann. Éc. norm., II, 2, 1873), le osservazioni del Mannheim destinate a mostrare l'ultilità *De l'emploi de la courbe représentative de la surface des normales principales d'une courbe gauche pour la démonstration de propriétés relatives à cette courbe* (C. R., 86, 1878), la nota dell' Enneper, *Zur Theorie der Curven doppelter Krümmung* (Götting. Nachr., 1881, e Math. Ann., 19, 1881), quella del Pellet, *Sur les normales aux courbes* (C. R., 104, 1887), quella del Ciani intorno a *Le superficie rigate inerenti a una linea a doppia curvatura* (Giorn. di Mat., 27, 1889), quella di V. Rouquet intitolata *Formules générales de la théorie des courbes gauches. Applications* (Mém. de l'Acad. de Toulouse, IX, 3, 1891), da ultimo gli studî del Pirondini *Sulla determinazione delle linee di cui il rapporto dalla curvatura alla torsione è una funzione nota dell'arco* (Ann. di Mat., II, 19, 1881), *Sulla costruzione delle linee dello*

---

(1) Da questo scritto sono corrette dùe proposizioni che si leggono nel postumo *Résumé des leçons d'analyse données à l'Ecole polytechnique* (Paris, 1843) di C. L. M. H. Navier (1785-1836).

spazio (Napoli Rend., II, 3, 1889), e *Sur la détermination des lignes dont le rapport de la courbure à la torsion est une fonction donnée de l'arc* (Journ. f. Math., 109, 1892).

In particolare al luogo dei centri di curvatura di una curva sghemba si riferiscono le memorie seguenti: J. Möller, *Ueber den Ort des Krümmungskreiscentrums einer Raumcurve* (Lund Univ. Acta, 21, 1884-85); H. Molins, *Sur quelques nouvelles propriétés du lieu des centres de courbure des courbes gauches* (Mém. de l'Acad. de Toulouse, VIII, 10, 1888); Pirondini, *Sul problema di trovare la curva di cui è noto il luogo dei centri di curvatura* (Ann. di Mat., II, 17, 1889); P. Adam, *Sur le lieu des centres de courbure d'une courbe gauche et sur les courbes gauches à courbure constante* (Nouv. Ann., III, 10, 1891).

Delle sfere osculatrici si occuparono il Lecornu *(Distance d'un point d'une courbe gauche à la sphère osculatrice d'un point infiniment voisin,* C. R., 100, 1885), Ph. Gilbert (1832-1892) (*Sur quelques formules de la théorie des courbes gauches,* Id., 101, 1885), e V. Jamet (*Sur la théorie des sphères osculatrices à une courbe,* Toulouse Ann., 4, 1890).

Alcune interessanti questioni di geometria analitica relative alle curve nello spazio diedero materia alle note del Painvin intitolate: *Détermination des plans osculateurs et des rayons de courbure en un point multiple d'une courbe gauche* (Ann. di Mat., II, 4, 1871; cfr. C. R., 68, 1869) e *Détermination des éléments de l'arête de rebroussement d'une surface développable définie par ses équations tangentielles* (Journ. de Math., II, 17, 1872; cfr. C. R., 71, 1870).

Una notevole proprietà metrica delle curve gobbe (1) venne enunciata dal Craig nella nota dal titolo *A geometrical Theorem* (Hopkins Circ., 1882) e dimostrata, dopo averne limitata la portata, dall' Hoppe (*Bemerkung zu einem Satze von Craig,* Arch. der Math., II, 2, 1885).

Importanza non minore possiede la *Bestimmung aller Raumcurven, deren Krümmungsradius, Torsionsradius und Bogenlänge durch eine beliebige Relation verknüpft sind* fatta dal Lie (Chri-

(1) " Se dal centro di una sfera si conducono le parallele alle normali principali di una curva chiusa, il luogo dei loro estremi divide la superficie della sfera in due parti fra loro equivalenti ".

stiania Versl., 1882), geometra al quale son dovuti altri importanti progressi che la geometria infinitesimale delle curve gobbe ha compiuti mediante l'applicazione ad essa della teoria dei gruppi di trasformazioni, come ora diremo brevemente. Il Lie si propose la ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti per eguaglianza di due curve date ad arbitrio nello spazio (1), e trovò che, detti s la lunghezza dell'arco e r, ρ i raggi di flessione e torsione di una curva sghemba, supposto che non tutte le tangenti di questa incontrino il cerchio immaginario all'infinito (2), per l'eguaglianza di due curve gobbe è necessario che entrambe siano rette, oppure soddisfacciano una delle tre coppie di relazioni seguenti:

$$r = \text{cost.} \quad \frac{d\rho}{ds} = f(\tau) \quad \text{ove } \rho \gtrless \text{cost.} \quad ;$$
$$\frac{dr}{ds} = f(r) \quad \rho = \psi(r) \quad \text{ove } r \gtrless \text{cost.} \quad ;$$
$$r = \text{cost.} \quad \rho = \text{cost.}$$

Il caso escluso ha indotto il Lie a colmare una lacuna che esiste nell'ordinaria teoria della curvatura delle linee gobbe, collo stabilire le formole di geometria differenziale applicabili alle curve di lunghezza nulla, formole di cui egli si è poi servito per determinare le condizioni di eguaglianza di due fra tali curve.

Oltre alle eliche, alle curve di Bertrand e ad altre curve di cui incidentalmente parlammo nelle pagine precedenti, parecchie curve a doppia curvatura particolari fissarono l'attenzione dei geometri a cui è dedicato il Cap. attuale. Ad es.: le lossodromie su una superficie qualunque (v. C. Dina, *Sopra una curva particolare giacente su una superficie generale,* Giorn. di Mat., 19, 1881) o sopra un cono (A. Enneper (1830-1885) *Ueber die Lossodromen der Kegelflächen,* Götting. Nachr., 1869 e Zeitschr. f. Math., 15, 1870), e le curve a torsione costante (G. Koenigs, *Sur la forme des courbes à torsion constante,* Toulouse Ann.,

(1) Un problema analogo esiste nella teoria delle superficie, la soluzione del quale fu schizzata dal Lie. Di tali importanti questioni è agevole prendere esatta notizia ricorrendo all'opera: Sophus Lie, *Vorlesungen über continuirliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen bearb. und herausgeg. von G. Scheffers* (Leipzig, 1893).

(2) In tal caso si avrebbero le " curve di lunghezza nulla ".

1, 1887; Lyon, *Sur les courbes à torsion constante, Thèse,* Paris, 1890; Fouché, *Sur les courbes algébriques à torsion constante,* C. R., 113 e 114, 1892, e Ann. Éc. norm., III, 9, 1892; E. Fabry, *Sur les courbes algébriques à torsion constante,* C. R., 113 e 114, 1892, e Ann. Éc. norm., III, 9, 1892 (1)). Si aggiungano a queste le curve a cui sono consacrati i seguenti scritti: Hazzidakis, *Ueber die Curven, welche sich so bewegen können, dass sie stets geodätische Linien der von ihnen erzeugten Flächen bleiben* (Journ. f. Math., 95, 1883); Molins, *Sur les courbes gauches dont le rayon de torsion et le rayon de la sphère osculatrice sont dans un rapport constant* (Mém. de l'Acad. de Toulouse, VIII, 6, 1884); E. Cesàro, *A proposito di un problema sulle eliche* (Giorn. di Mat., 24, 1886); Pirondini, *Sulle linee a doppia curvatura* (Id., 26, 1888); Venske, *Behandlung einiger Aufgaben der Variationsrechnung welche sich auf Raumcurven constanter erster Krümmung beziehen* (Diss. Göttingen, 1891); Stäckel, *Ueber algebraisch rectificirbare Raumcurven* (Math. Ann, 43, 1893) e *Ueber algebraischen Raumcurven* (Id., 45, 1894).

Rileveremo da ultimo che della teoria che ci occupa possediamo parecchie buone esposizioni speciali (senza contare quelle che si leggono nei trattati di geometria analitica dello spazio) fatte con o senza il sussidio delle coordinate. Vanno ricordate — oltre quella che si legge nella prima delle Note di cui Liouville corredò la sua edizione della grande opera di Monge (cfr. n. seg.) — particolarmente le seguenti: A. Schell, *Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung* (Leipzig, 1859); P. Serret, *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des courbes à double courbure* (Paris, 1860); H. Laurent, *Théorie des courbes gauches* (Ann. Éc. norm., II, 1, 1872); R. Hoppe, *Principien der analytischen Curventheorie* (Arch. der Math., 56, 1874; v. anche Id., 60, 1877); Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes de l'espace* (Paris, 1876); E. Catalan, *Théorie analytique des lignes à double courbure* (Mém. la Soc. roy. des Sciences de Liège, 6, 1878).

4. Abbandoneremo ora le figure ad una dimensione per ren-

---

(1) È ivi risposto affermativamente alla questione se esistano delle curve algebriche reali a torsione costante.

Delle curve a torsione costante tratta anche la nota del Cosserat citata più innanzi, cioè in fine del n. 9 di questo Cap.

dere conto dello stato attuale delle nostre cognizioni intorno alle proprietà infinitesimali delle superficie; le relazioni geometriche che ora passiamo a descrivere, a differenza di quelle esposte nel Cap. III, non si trovano nel campo della geometria projettiva, nè vi si possono ricondurre applicando quella nota considerazione (v. Cap. X, n. 8) che fa apparire le proprietà metriche come casi particolari delle descrittive e ciò perchè, per dirla con le parole di F. Klein (1) — il gruppo di trasformazioni proprio alla geometria differenziale non ha nulla di comune con quello che caratterizza la geometria projettiva.

Un capitolo importantissimo della disciplina di cui ora imprendiamo lo studio è opera di Eulero e Meusnier; alludiamo alla teoria della curvatura delle superficie su cui questi geometri scrissero due fondamentali memorie, entrambe intitolate *Recherches sur la courbure des surfaces,* e di cui una venne stampata nei Mém. de Berlin (16, 1760) (2) e la seconda fu letta all'Accademia di Parigi il 14 e il 21 febbraio 1776 e inserita nella raccolta dei Sav. Étr. (10, 1785). Ma la nascita della geometria differenziale si può far datare dalla pubblicazione del classico libro di Monge: *Application de l'analyse à la géomêtrie* (3); e siccome in seguito lo scritto che più potentemente contribuì allo sviluppo di essa fu quello di Gauss intitolato *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (4), così ci

---

(1) Si veggano le ammirabili *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Erlangen 1872; oppure Math. Ann., 43, 1893).

(2) Ivi è, fra l'altro, dimostrato erroneo il ritenere che in ogni punto di qualsiasi superficie esista una sfera osculatrice.

(3) Fu pubblicato col titolo sopraindicato nel 1807 e nel 1809; ma prima era stato in parte stampato (1795 e 1801) col titolo *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie.* La migliore edizione che se ne possiede è quella che il Liouville curò nel 1850 corredandola di numerose note.

L'importanza delle indagini di Monge fu riconosciuta anche da Lagrange, di cui passarono alla storia le parole: " Avec son application de l'analyse à la représentation des surfaces, ce diable d'homme sera immortel! ".

(4) Presentata alla Società delle Scienze di Gottinga l'8 ottobre 1827 ed inserita nel t. 6 delle *Commentationes recentiores Societatis Gottingensis;* riprodotta poi in *Gauss Werke*, 4 (Göttingen, 1873) ed in appendice all'edizione di Monge fatta da Liouville. Si connettono ad essa le *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie* inserite nel volume testè citato delle Opere di Gauss.

Una traduzione francese di questa memoria si legge in Nouv. Ann., 11 (1852) ed una tedesca di A. Wangerin forma il volume degli " Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften " intitolato *Allgemeine Flächentheorie* (Leipzig, 1889).

sembra conveniente scegliere come canavaccio della nostra esposizione l'ordinamento di materie preferito dai due sommi geometri testè citati, indicando dapprima quello che essi scrissero sui varî argomenti di cui si occuparono e poi le aggiunte fatte dai geometri che ne calcarono le orme.

5. Chi aprè oggi il grande trattato di Monge si trova dinnanzi un primo § privo di grande interesse, ma che è un'indispensabile preparazione a quanto segue, avendo per argomento la determinazione mediante il calcolo delle rette normali e dei piani tangenti ad una superficie qualsivoglia. Più importanti sono i quattro §§ successivi i quali sono dedicati ordinatamente alle superficie coniche, alle cilindriche, a quelle di rivoluzione (1) ed a quelle rigate che (per dirla in linguaggio moderno) sono contenute in una congruenza lineare avente una direttrice all'infinito. Più notevole è il § VI, giacchè ivi Monge, nel trattare delle superficie inviluppi (2) e nel considerarne le coppie, le terne o le quaterne di inviluppanti consecutive, introduce le nozioni fondamentali di " caratteristica ", di " spigolo di regresso " e di punti stazionarî " d'un inviluppo. Si collegano a questo § i tre successivi i quali concernono ordinatamente le superficie tubulari (inviluppo di una sfera di raggio costante il cui centro percorre una curva piana) (§ VII), le superficie aventi per linee di massima pendenza su un piano dato delle rette d'inclinazione costante sul piano stesso (§ VIII) ed infine l'inviluppo di una superficie dotata di un moto di traslazione tale che un punto ad essa invariabilmente connesso scorre sopra una linea data (§ IX) (3).

A partire da questo punto dell'opera di Monge, la teoria delle

---

(1) Queste tre famiglie di superficie soddisfanno una condizione comune che l'Enneper ha stabilito nella nota *Ueber ein geometrisches Problem* (Götting. Nachr., 1874).

(2) Cfr. Enneper, *Bemerkungen über die Enveloppe einer Fläche* (Math. Ann., 5, 1872).

(3) Se $x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$, $z = \zeta(t)$ sono le espressioni parametriche delle coordinate dei punti di questa e $F(x, y, z) = 0$ l'equazione della superficie mobile in una sua posizione, la superficie cercata ha per inviluppante quella di cui

$$F(x + \xi(t), y + \eta(t), z + \zeta(t)) = 0$$

è l'equazione.

equazioni a derivate parziali entra in scena per recitare la parte importante che questo grande matematico le assegnò nella geometria analitica superiore; da questo istante si scorge come in un gran numero di casi per caratterizzare la natura intima di una famiglia di superficie sia assai più conveniente il considerarne l'equazione differenziale che l'equazione in termini finiti. Esempî capaci di mostrare la verità di tale osservazione sono a dovizia offerti dalle rigate contenute in un complesso lineare speciale coll'asse all'infinito o a distanza finita (§§ X e XI), altri dalle sviluppabili (§ XII), dall'inviluppo definito da Monge nel precedente § IX (§ XIII) e dal luogo di una curva mobile che scorre con un suo punto sopra una curva fissa (§ XIV) (1).

A nuove classi di superficie ancor più degne di studio guida la considerazione del modo in cui sono distribuite nello spazio le normali di una superficie e la conseguente introduzione delle linee di curvatura; l'una e l'altra sono fatte conoscere nel § XV, il quale è fra i più importanti di tutta l'opera di Monge; il caso particolare notevole dell'ellissoide dà matèria al § successivo nel quale sono riesposte delle ricerche che Monge aveva fatto già conoscere altrove (cfr. Cap. III, n. 6 (2)). Numerosissime ed importantissime sono le questioni cui dà luogo la nozione di raggi principali di curvatura di una superficie in un punto e di linee di curvatura. Si può ad es. cercare come siano generabili le superficie di cui le linee di curvatura d'un sistema stanno tutte in piani di data giacitura (§ XVII). Si può poi chiedere per quali superficie accada che uno dei raggi di curvatura è costante; a tale domanda rispose Monge (§ XVIII) dimostrando che una superficie dotata di tale proprietà è generabile nel modo indicato dai §§ IX e XIII della sua opera. Se i due raggi di curvatura sono fra loro eguali e diretti nello stesso senso, la superficie è sferica (§ XIX); se invece sono fra loro eguali ma in direzioni opposte

(1) Probabilmente qui il Lie trovò lo stimolo alle ricerche che lo condussero alla *Bestimmung aller Flächen die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden* (Arch. for Math. og Nat., 7, 1882).

Riguardō alle superficie suddette si consulti anche l'importante lavoro del Mainardi *Sulle superficie generabili dal movimento di una linea piana qualunque* (Mem. Soc. XL, 20, 1830; cfr. la nota dello stesso autore *Su la teoria delle curve* (Tortolini Ann., 5, 1854).

(2) Sullo stesso argomento si vegga la nota del Cayley, *On a Class of Differential Equations, and on the Lines of Curvature of an Ellipsoid* (Cambridge Journ., 3, 1843).

le superficie hanno la proprietà (1) di essere d'area minima (§ XX) (2). Se poi uno dei raggi di curvatura in ogni punto è infinito, la superficie è rigata (§ XXI) (3).

Alla teoria della curvatura delle superficie si collegano le importanti ricerche di Monge sulle superficie tubulari a direttrice qualunque (§§ XXII e XXVI; v. anche Hoppe, *Bedingung einer. Kanalfläche nebst einigen Bemerkungen an Kanalflächen,* Arch. der Math., II, 1, 1884), nonchè su quelle le cui normali toccano una data sfera (§ XXIII), un dato cono (§ XXIV) o una data sviluppabile (§ XXV): sono queste le prime indagini intorno alla determinazione di una superficie di cui si conosca una falda della superficie dei centri di curvatura, indagini che furono ai tempi nostri validamente proseguite dal Weingarten *(Ueber die Flächen, deren Normalen eine gegebene Fläche berühren,* Journ. f. Math., 62, 1863), dall'Enneper *(Ueber die Flächen, welche gegebenen Flächen der Krümmungsmittelpunkte entsprechen,* Götting. Nachr., 1872), dall'Hoppe (*Abwickelbare Mittelpunktsflächen,* Arch. der Math., 63, 1879; *Bestimmung einer Fläche durch die eine ihrer Mittelpunktsflächen,* Id., 68, 1882), dall'August *(Ueber Flächen mit gegebene Mittelpunktsfläche und über Krümmungsverwandschaft,* Ivi), e dal Rudio *(Zur Theorie der Flächen, deren Krümmungsmittelpunktsflächen confocalen Flächen zweiten Grades sind,* Journ. f. Math., 95, 1883).

Notiamo finalmente che per tutte le anzidette famiglie di superficie Monge trovò le equazioni generali sia differenziali sia in termini finiti; siccome egli insegnò a risalire da quelle a queste, così la grande opera di cui ci stiamo occupando merita uno studio approfondito anche dai cultori dell'analisi infinitesimale; che i geometri puri debbano occuparsene è dimostrato, a tacer

---

(1) V. Lagrange, *Essai sur une nouvelle méthode pour déterminer les fonctions maxima et minima des formules intégrales indéfinies* (Miscellanea Taurinensia, 2, 1760-61), e Meunier, citate *Recherches sur la courbure des surfaces.*

(2) È nel suo *Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles* (Mém. de l'Acad. des Sc., Paris, 1784) che Monge si occupò per la prima volta delle superficie di area minima e dell'integrazione della equazione differenziale scoperta da Lagrange che le caratterizza.

Alcuni lievi errori in essa contenuti furono corretti, coll'aiuto di Monge stesso, da Legendre nel *Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux dérivées partielles* (Id., 1787).

(3) Cfr. O. Rodrigues, *Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de curbure des surfaces* (Corr. Éc. pol., 3, 1815).

d'altro, dalle eleganti costruzioni che Monge scoprì per molte delle famiglie di superficie dianzi definite.

6. Colui che, più di qualunque altro, può aspirare al nome di continuatore dell'opera analitica di Monge è Carlo Dupin, al quale siamo debitori di due lavori magistrali su cui è un dovere ed un piacere per noi l'arrestarci qualche momento.

Il primo porta il titolo modesto *Développements de géométrie* (Paris, 1813), ma ha lo scopo non modesto di trattare tanto analiticamente quanto geometricamente tutte le questioni relative alla teoria della curvatura delle superficie; esso consta di cinque memorie distinte, ma fra loro coordinate, di cui la prima e la quarta sono di geometria pura, le altre di geometria analitica. La prima, dopo molte ricerche sull' osculazione e sulla curvatura delle superficie e delle loro sezioni, fa conoscere gli elementi della teoria affatto originale delle " tangenti conjugate „ (1), teoria che viene poi svolta nelle due memorie successive, nell' ultima delle quali incontrasi per la prima volta l'" indicatrice „ a cui Dupin legò il proprio nome (2). La quarta memoria concerne la " curvatura considerata in tutta l'estensione di una superficie „, e nella quinta si trova una teoria delle trajettorie ortogonali applicate alla determinazione delle linee di curvatura. A Dupin siamo ancora debitori della nozione di " linee asintotiche „ e delle prime ricerche su queste notevoli linee, a cui in seguito molti geometri consacrarono delle ricerche importanti (3) e che suggerirono la considerazione

(1) Una generalizzazione del teorema di Dupin sulle tangenti coniugate è esposta nell'articolo di E. Weber, *Theorie der Flächenelemente höherer Ordnung des Raumes von 3 Dimensionen* (Math. Ann., 44, 1894).

(2) Cfr. E. Barbier, *Sur une généralisation de l'indicatrice de Ch. Dupin* (C. R., 105, 1887).

(3) Ricorderemo qui quelle generali dell' Enneper (*Ueber asymptotische Linien*, Gôtting. Nachr., 1870; *Weitere Bemerkungen über asymptotische Linien*, Id., 1871), del Lelieuvre (*Sur les lignes de courbure et les lignes asymptotiques des surfaces*, C. R., 106, 1888; Bull. S. M. F., 16, 1888) e del Koenigs (*Sur les réseaux plans à invariants égaux et les lignes asymptotiques*, C. R., 114, 1892), e quelle speciali dell'Hoppe (*Zweite asymptotische Linie einer Regelfläche*, Arch. der Math., 60, 1877), dell'Halphen (*Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches douées de deux directrices rectilignes*, Bull. S. M. F., 5, 1877), del Bioche, *Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces gauches* (Toulouse Ann., 2, 1888), e di H. Maschke (*Asymptotic Lines on a Circular Ring*, Bull. of the American Math. Soc., II, 1, 1895).

sopra ogni superficie di altre linee, da un certo punto di vista analoghe (1). Da ultimo (*dulcis in fundo!*) dall'opera di Dupin si apprende l'importantissimo teorema: " le superficie di un sistema triplo ortogonale si tagliano nelle loro linee di curvatura ", il quale, come vedremo, servì di punto di partenza a una quantità di indagini sulle superficie e fu giudicato di tanto valore che molti geometri non credettero abbassarsi cercandone nuove dimostrazioni (2).

Di cinque memorie distinte si compone pure la seconda opera geometrica di Dupin (*Applications de géométrie et de méchanique à la marine, aux ponts et chaussées, etc., pour faire suite aux " Développements de géométrie "*, Paris, 1822); ma di esse una sola è di diretta pertinenza della geometria (3): è quella intitolata *Sur les routes suivies par la lumière et par les corps élastiques, en général, dans les phénomènes de la réflexion et de la réfraction* (4), e nella quale, fra l'altro, è fatto uno studio metodico della ciclide (cfr. Cap. III, n. 9), che è l'unica superficie — oltre la sfera, il cono ed il cilindro circolari — di cui tutte le linee di curvatura sono circolari, ed è insegnata una grande esten-

(1) Tali sono quelle di cui si occupò per la prima volta il Darboux nella nota intitolata *Les courbes tracées sur une surface, et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface* (C. R., 73, 1871) e studiate poi dall'Enneper (*Bemerkungen über die Differentialgleichung einer Art von Curven auf Flächen*, Götting. Nachr., 1871), e dal Cosserat (*Sur les courbes tracées sur une surface et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface*, C. R., 121, 1895). Tali quelle, esistenti soltanto nelle regioni a curvatura positiva, le cui tangenti fanno colle tangenti coniugate l'angolo minimo; preparate dalla nota di Hoppe *Ueber das Minimum des Winkels zwischen zwei conjugierten Tangenten auf positivgekrümmter Fläche* (Arch. der Math., 69, 1882), esse vennero cominciate da E. Pucci (*Dell'angolo caratteristico e delle linee caratteristiche di una superficie*, Lincei Rend., IV, 5, 1889_1) e proseguite da V. Reina (*Di alcune proprietà delle linee caratteristiche* (Ivi). Tali le " curve equidistanti " che vennero incontrate indipendentemente dal Tchébycheff (*Sur la coupe des vêtements*, Ass. fr., Paris 1878) e dal Voss (*Ueber ein neues Princip der Abbildung krümmer Flächen*, Math. Ann., 19, 1881) e da quest'ultimo poi studiate nella nota *Ueber äquidistante Curvensysteme auf krummen Flächen* (Katalog der math. Ausstellung zu Nürnberg, München 1892).

(2) Fra essi citeremo qui il Cayley per la nota *A Demonstration of Dupin's Theorem* (Quart. Journ., 12, 1873) e O. v. Lichtenfels per l'articolo *Zum Beweise des Theorems von Dupin* (Monatshefte, 5, 1894).

(3) A mostrare però che anche le rimanenti non sono destituite di valore matematico, citeremo la nota del Codazzi *Intorno ad alcuni teoremi di Dupin* (Tortolini, Ann., 8, 1857) ove sono dimostrate certe proposizioni della memoria *Sur la stabilité des corps flottants*.

(4) Cfr. Minding, *Neuer Ausdruck für die Hauptgesetz der Dioptrik* (Poggendorff Annalen, 70, 1847).

sione di cui è suscettibile un importantissimo teorema del Malus (1755-1811) (1).

Pel desiderio d'essere brevi, non per avere esaurito quanto contengono di notevole le opere di Dupin, abbandoniamo questo egregio geometra e passiamo a dir qualche cosa intorno agli scritti che completarono questo o quel punto delle opere discorse nel n. precedente e nell'attuale.

7. Accorderemo il primo posto alle investigazioni concernenti le più semplici superficie speciali. Fra quelle intorno alle superficie di rivoluzione ci limiteremo a ricordare le memorie seguenti: Enneper, *Ueber ein geometrisches Theorem* (Götting. Nachr., 1868); Résal, *Sur la génération de la courbe méridienne d'une surface de révolution dont la courbure moyenne varie suivant une loi donnée* (C. R., 85, 1877); Molins, *De la détermination des surfaces de révolution, dont les trajectoires des méridiennes sous un angle constant ont pour perspective des spirales logarithmiques* (Mém. de l'Acad. de Toulouse, VIII, 7, 1885) e *De la détermination des surfaces de révolution ayant un même axe donné et qui sont coupées par une sphère donnée suivant une ligne géodésique* (Id., IX, 3, 1891); August, *Ueber Rotationsflächen mit loxodromische Verwandtschaft* (Zeitschr. f. Math., 33, 1888); Pirondini, *Sulla teoria delle superficie di rivoluzione* (Ann. di Mat., II, 18, 1890); E. Doležwal, *Ueber Differentialgleichungen von Rotations-und Regelfläche* (Arch. der Math., II, 14, 1895).

Più numerosi sono gli scritti intorno alle rigate (2), di cui ricorderemo quelli che seguono: Combescure, *Sur quelques problèmes relatifs aux surfaces réglées* (Journ. f. Math., 62, 1863); Dini, *Sopra alcune proprietà delle superficie rigate* (Giorn. di Mat., 3, 1865), *Sulle superficie gobbe che possono essere rappresentate da un equazione data a derivate parziali del 2° ordine* (Id., 3, 1865, e 4,

(1) Si vegga il *Mémoire sur l'optique* di questo celebre fisico, inserite nel Journ. Éc. pol., 14° cah., 1808. Mentre questi aveva dimostrato che i raggi di una stella riflettendosi sopra una superficie qualsivoglia si trasformano nelle normali a una superficie, Dupin osservò che le normali ad una superficie dopo quante si vogliano riflessioni e rifrazioni diventano normali ad un'altra superficie.

(2) Le rigate costituiscono la più semplice categoria delle superficie che il Lelieuvre ha considerate nella memoria *Sur les surfaces à génératrices rationnelles* (Ann. Éc. norm., III, 12, 1895).

1866) e *Sulle superficie gobbe applicabili a quelle di rivoluzione e su alcune proprietà delle superficie gobbe delle normali principali di una curva* (Id., 4, 1866); Catalan, *Recherches sur les surfaces gauches* (Belgique Mém., 18, 1866); Fais, *Sulle principali proprietà delle trajettorie ortogonali delle generatrici delle superficie rigate* (Bologna Mem., IV, 1, 1880); Pirondini, *Studii geometrici relativi specialmente alle superficie gobbe* (Giorn. di Mat., 23, 1885) e *Sulle superficie rigate* (Id., 25, 1887); Molins, *Sur les surfaces gauches dont la ligne de striction est plane et qui sont coupées sous le même angle par le plan de cette ligne* (Mém. de l'Acad. de Toulouse, VIII, 9, 1887); Koenigs, *Détermination sous forme explicite de toute surface réglée rapportée à ses lignes asymptotiques, et, en particulier, de toutes les surfaces réglées à lignes asymptotiques algébriques* (C. R., 106, 1888); Bioche, *Sur les systèmes de courbes qui divisent homographiquement les génératrices d'une surface réglée* (Bull. Sc. math., II, 12, 1888), *Sur les surfaces gauches dont les lignes de courbure possèdent une propriété donnée* (Ivi) e *Sur les surfaces réglées qui passent par une courbe et coupent sous un angle donné la développable des tangentes* (Ivi); Raffy, *Détermination des surfaces harmoniques réglées* (C. R., 110, 1890 (1)); Hoppe, *Zur Theorie der Regelflächen* (Arch. der Math., II, 9, 1892) e *Construction einer Regelfläche aus gegebener Strictionslinie* (Ivi).

Una esposizione delle proprietà delle superficie rigate si legge nell' opera di E. Goedseels, *Théorie des surfaces réglées* (Louvain, 1885); mentre in particolare delle sviluppabili trattarono: Molins, *Sur les lignes de courbure et les lignes géodésiques des surfaces développables dont les génératrices sont parallèles à celle d'une surface réglée quelconque* (Journ. de Math., II, 4, 1859); Mangoldt, *Ueber eine charakteristische Eigenschaft der developpablen Flächen* (Math. Ann., 19, 1881); Vivanti, *Sulle trasformazioni di contatto che trasformano qualunque sviluppabile in una sviluppabile* (Palermo Rend., 5, 1891), nota a cui serve di continuazione l'altra dal titolo *Un problema sulle trasformazioni di contatto* (Ivi).

Altri complementi degni di nota alle opere di Monge e di Dupin sono rappresentati dai risultati che ebbero le indagini

(1) Questa nota prepara le *Recherches sur les surfaces harmoniques* dello stesso geometra, delle quali tre sezioni apparvero in: Tolouse Ann., 1894; Journ. de Math., IV, 10, 1894; Ann. Éc. norm., III, 12, 1895.

sul modo di comportarsi delle linee di curvatura in un ombilico di A. Cayley (*On Differential Equations and Umbilici,* Phil. Mag., 24, 1863), W. R. Hamilton (*Elements of Quaternions,* London, 1866), Frost (*On the Direction of Lines of Curvature in the Neighbourhood of an Umbilici,* Quart. Journ., 10, 1869; v. Cayley, *Note on Mr. Frost Paper,* Id., 11, 1870), R. Hoppe (*Krümmungslinien in den Nabelpunkten von Flächen,* Arch. f. Math., 70, 1883) e Bioche (*Remarques sur les lignes de courbure qui passent par un ombilic,* Bull. S. M. F., 18, 1890) (1).

Hanno delle analogie con queste le osservazioni del Brioschi *Sulle linee di curvatura* (Tortolini Ann., 4, 1853), del Ribaucour (1845-1895) *Sur la théorie des lignes de courbure* (C. R., 74, 1872; v. anche *Note sur les développées des surfaces,* Ivi), le ricerche del Röthig, *Zur Theorie der Flächen* (Journ. f. Math., 85, 1878), del Knoblauch, *Ueber die Bedingung der Isometrie der Krümmungscurven* (Id., 103, 1888) e il *Teorema relativo alle linee di curvatura delle superficie e sue applicazioni* (Ann. di Mat., II, 16, 1888) del Pirondini; più speciali, ma dotate di non comune importanza, sono le note del Darboux aventi per iscopo la *Détermination des lignes de courbure d'une classe de surfaces et en particulier des surfaces tétraédriques de Lamé* (C. R., 84, 1877) e la *Détermination des lignes de courbure de toutes les surfaces de quatrième classe, correlatives aux cyclides, qui ont le cercle à l'infini pour ligne double* (Id., 92, 1881).

Come continuazioni o derivazioni delle classiche opere di Monge e Dupin possono anche riguardarsi gli studî sulle superficie che sono divise in quadrati infinitesimi dalle loro linee di curvatura, i quali vennero inaugurati dal Cayley (*Sur les surfaces divisibles en carrés par leurs lignes de courbure et sur la théorie de Dupin,* C. R., 74, 1872; *On the Surfaces divisible into Squares by their Curves of Curvature,* Proc. L. M. S., 4, 1871-73) e continuati dal Weingarten (*Ueber die Differentialgleichungen der Oberflächen, welche durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate geteilt werden,* Berliner Ber., 1883) e dal Willgrod (*Ueber Flächen welche sich durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate teilen lassen,* Diss. Göttingen, 1883). Con tali investigazioni hanno qualche affinità quelle del Fibbi *Sulle*

(1) Cfr. Picard, *Traité d'analyse,* 3 (Paris, 1895), p. 225.

superficie che, da un doppio sistema di traiettorie isogonali sotto un angolo costante delle linee di curvatura, sono divise in parallelogrammi infinitesimi equivalenti (Lincei Rend., V, 4, 1895_1).

8. Altrettanto si può dire di quelle assai più antiche e numerose intorno alle superficie le cui linee di curvatura di un sistema o di entrambi sono piane o sferiche, ed i cui risultati più cospicui sono consegnati nelle memorie seguenti: A. Serret, *Mémoire sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes ou sphériques* (Journ. de Math., 18, 1853); O. Bonnet, *Mémoire sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques* (Journ. Éc. pol., 33e cah., 1853); Joachimsthal, *Sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont planes* (Journ. f. Math., 54, 1857); Brioschi, *Intorno ad alcune proprietà delle superficie a linee di curvatura piane o sferiche* (Tortolini Ann. 8, 1857); Picart, *Mémoire sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques* (C. R., 46, 1858); Dini, *Sulle superficie che hanno le linee di curvatura piane* (Ann. di Mat., II, 1, 1867); *Sopra le superficie che hanno un sistema di linee di curvatura sferiche* (Mem. Soc., XL, III, 2, 1869), e *Sulle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura piane* (Atti delle Univ. tosc., 1869 e 1871); Enneper, *Analytisch-geometrische Untersuchungen* (Götting. Nachr., 1868 (1), *Ueber die Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien* (Id., 1872), *Untersuchungen über die Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien* (Götting. Abh., 23 e 26, 1880); *Ueber die Flächen mit einem System sphärischcr Krümmungslinien* (Journ. f. Math., 94, 1883); Ribaucour, *Sur une propriété des surfaces enveloppes des sphères* (C. R., 67, 1868); Kretschner, *Beiträge zur Theorie der Flächen mit ebenen Krümmungslinien, welche gegebenen Bedingungen genügen* (Frankfurt a. O., 1871); A. Razzaboni, *Alcune proprietà delle superficie a linee di curvatura piane* (Bologna Mem., III, 10, 1879); Rouquet, *Étude géométrique des surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes* (Toulouse, 1882) e *Des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes* (Mém. de l'Acad. de Tou-

(1) Cfr. Bockwoldt, *Ueber die Enneper'schen Flächen mit constantem positivem Krümmungsmaas, bei denen die eine Schaar der Krümmunglinien von ebenen Curven gebildet wird* (Diss. Gottingen, 1878).

louse, VIII, 9, 1887, e 10, 1888); E. Combescure, *Sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes dans un système seulement* (Mém. de l'Acad. de Montpellier, 10, 1883); Dobriner, *Ueber die Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien* (Journ. f. Math., 94, 1883); Voretzsch, *Untersuchung einer speciellen Fläche constanter mittlerer Krümmung, bei welcher die eine der beide Scharen der Krümmungslinien von ebenen Curven gebildet wird* (Diss. Göttingen, 1883); Lecornu, *Mémoire sur les surfaces enveloppes de sphères* (Journ. Éc. pol., 53[e] cah., 1883); Darboux, *Détermination d'une classe de surfaces à lignes de courbure planes dans un système et isothermes* (C. R., 96, oppure Bull. Sc. math., II, 8, 1883); Pirondini, *Sulle superficie le cui linee di curvatura di un sistema sono piane* (Giorn. di Mat., 22, 1884); Cayley, *On the Surfaces with Plane or Spherical Curves of Curvature* (Am. Journ., 11, 1888-89); Burnside, *On the Surfaces whose Lines of Curvature are all Plane* (Mess., II, 20, 1890); Caronnet, *Sur les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes et égales* (C. R., 117, 1893); Adam, *Sur les surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans un système ou dans les deux systèmes* (Ann. Éc. norm., III, 10, 1893); Blutel, *Sur les surfaces qui admettent un système de lignes de courbure sphériques et qui ont même représentation sphérique pour leurs lignes de courbure* (C. R., 116, 1893). Queste ricerche costituiscono una sezione del gran problema di trovare le superficie aventi per linee di curvatura delle curve prestabilite, ad altre sezioni del quale sono preliminari importanti lo scritto del Petot *Sur les surfaces qui ont pour lignes de courbure d'un système des hélices tracées sur des cylindres quelconques* (C. R., 106, 1888), e quello del Bianchi *Sulle superficie le cui linee assintotiche in un sistema sono curve a torsione costante* (Lincei Rend., IV, 6, 1890_1).

Di ordine analogo, ma più vaste, sono le importantissime indagini sulle superficie di cui i raggi di curvatura in ogni punto sono legati da una relazione; inaugurate da Weingarten colla memoria *Ueber die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Function des andern ist* (Journ. f. Math., 62, 1863), esse vennero proseguite dall' Halphen (*Théorème concernant les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation,* Bull. S. M. F., 4, 1876), dal

Lie (*Ueber Flächen, deren Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind,* Arch. f. Math. og Nat., 4, 1879; *Sur les surfaces dont les rayons de courbure ont entre eux une relation,* Bull. Sc. Math., II, 4, 1880), dal Weingarten stesso (*Ueber eine Eigenschaft der Flächen bei denen der eine Hauptkrümmungsradius eine Function des anderen ist,* Journ. f. Math., 103, 1888), dal Raffy (*Sur certaines surfaces, dont les rayons de courbure sont liés par une relation,* Bull. S. M. F., 19, 1891), e, nel caso in cui la superficie è rigata, dal Beltrami (*Risoluzione di un problema relativo alla teoria delle superficie gobbe,* Ann. di Mat., 7, 1865) e dal Dini (*Sulle superficie gobbe nelle quali uno dei due raggi di curvatura principale è una funzione dell'altro,* Ivi).

Rispetto a questa categoria d'investigazioni si può considerare come una sottoclasse quella costituita dagli studî sulle superficie a curvatura media costante, benchè alcuni di questi siano anteriori alla memoria di Weingarten, come risulta dall'elenco seguente: Delaunay, *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante* (Journ. de Math., 6, 1841); C. Sturm, *Note à l'occasion de l'article précédent* (Ivi); Jellet, *Sur la surface dont la courbure moyenne est constante* (Id., 18, 1853); Dini, *Sulle superficie nelle quali la somma dei due raggi di curvatura principale è costante* (Ann. di Mat., 7, 1865); Chini, *Sulle superficie a curvatura media costante* (Giorn. di Mat., 27, 1889; cfr. anche la nota dello stesso autore *Sopra una classe di superficie,* Ivi); Vivanti, *Sulle superficie a curvatura media costante* (Rend. Ist. Lomb., II, 28, 1895).

Lo stesso si può ripetere per le ricerche intorno alle superficie per cui è costante la differenza dei raggi di curvatura principali dovute al Lipschitz (*Zur Theorie der krummen Oberflächen,* Acta, 10, 1887; *Sur les surfaces où la différence des rayons de courbure principaux en chaque point est constante,* C. R., 104, 1887) ed al Lilienthal (*Bemerkung über diejenigen Flächen, bei denen die Differenz der Hauptkrümmungen constant ist,* Acta, 11, 1888), e per quelle di B. Calò, *Sulle evolute delle superficie i cui raggi principali di curvatura sono legati dalla relazione* $r_1 - r_2 = 2T_0 \operatorname{sen}\left(\frac{r_1+r_2}{2T_0}\right)$ ($T_0 = \text{cost.}^e$) *e sulle loro flessioni* (Ann. di Mat., II, 21, 1893).

9. Anche le superficie di area minima sono comprese come casi particolari fra quelle i cui raggi di curvatura sono legati da una relazione; ma la verità storica impone di considerare le memorie che ad esse si riferiscono piuttosto come complementi al § 20 delle *Applications* di Monge. Tali memorie costituiscono una collezione assai ricca e variopinta; lo Schwarz — che, come vedremo, è uno di coloro a cui maggiormente si deve se la teoria delle superficie in discorso ha raggiunto oggi una perfezione tanto considerevole — ne ha compilato un catalogo completo che auguriamo vegga ben presto la luce. Intanto noi indicheremo qui le più cospicue pubblicazioni sull'argomento, accordando il primo posto a quelle relative alle proprietà generali di esse e che sono: Poisson, *Note sur la surface dont l'aire est un minimum entre des limites données* (Journ. f. Math., 8, 1832); Scherk, *Bemerkung über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen* (Id., 13, 1835); Steiner, *Ueber parallele Flächen* (Berliner Ber., 1840); E. G. Björling, *In integrationem aequationis derivatarum partialium cujus in puncto unoquoque ambo radii curvedinis aequales sunt signoque contrario* (Arch. der Math., 4, 1844); Bonnet, *Note sur la théorie générale des surfaces* (C. R., 37, 1853); Catalan, *Sur les surfaces dont les rayons de courbure, en chaque point, sont égaux et de signes contraires* (Id., 41, 1855) e *Mémoire sur les surfaces dont les rayons de courbure en chaque point sont égaux et des signes contraires* (Journ. Éc. pol., 37e cah., 1858); Mathet, *Solution d'un problème de géométrie* e *Étude sur un certain mode de génération des surfaces d'étendue minimum* (Journ. de Math., II, 8, 1863); Enneper, *Analytisch-geometrische Untersuchungen* (Zeitschr. f. Math., 9, 1864); Weierstrass, *Untersuchungen über die Flächen in denen die mittlere Krümmung überall gleich 0 ist* (Berliner Ber., 1866) (1); Riemann, *Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung* (Götting. Abh., 13, 1867 (2)); Christoffel, *Ueber einige allgemeine Eigenschaften des Minimumsflächen* (Journ. f. Math., 62, 1867); Beltrami, *Sulla teoria generale delle superficie d'area*

---

(1) È questo uno dei più importanti lavori sulle superficie di cui trattiamo.

(2) Cfr. Niewenglowski, *Exposition de la méthode de Riemann pour la détermination des surfaces minimes de contour donné* (Ann. Éc. norm., II, 9, 1880).

minima (Bologna Mem., II, 7, 1868) (1); Schwarz (2), *Beitrag zur Untersuchung der zweiten Variation des Flächeninhalts von Minimalflächenstücken im Allgemeinen und von Theilen der Schraubenfläche im Besonderen* (Berliner Ber., 1872), *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen* (Journ. f. Math., 80, 1875) e *Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung* (Acta Societatis Fennicae, 15, 1885); Ribaucour, *Étude des elassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle* (Belgique Mém., 44, 1881); Bianchi, *Sopra una proprietà caratteristica delle superficie ad area minima* (Giorn. di Mat., 22, 1884); Pincherle, *Sopra alcuni problemi relativi alle superficie d'area minima* (Rend. Ist. Lomb., II, 19, 1886); Kiepert, *Ueber Minimalflächen* (Journ. f. Math., 82, 1887 e 85, 1888); Goursat, *Sur un mode de transformation des surfaces minima* (Acta, 11, 1888); P. Paci, *Sopra le superficie minima* (Torino Atti, 29, 1893-94); A. Demoulin, *Note sur une déformation des surfaces de révolution* (Belgique Bull., III, 29, 1895). Riguardo a questi scritti ci limiteremo a notare che alcuni misero in luce ed altri svilupparono la connessione che esiste fra la teoria delle superficie d'area minima, quella delle funzioni di una variabile complessa e quella della rappresentazione conforme di un'area sopra un'altra.

Fra le superficie d' area minima furono in particolare studiate quelle rigate, e Catalan dimostrò (nella nota *Sur les surfaces réglées dont l' aire est minimum,* Journ. de Math., 7, 1842) che l'elicoide a piano direttore è l'unica superficie rigata in ogni punto della quale la curvatura media è nulla: risultato importante che venne poi confermato dal Wantzel in una nota presentata l'11 febbraio 1843 alla Société Philomatique di Parigi, da M. Roberts (*Sur les surfaces dont les rayons de courbure sont égaux, mais dirigés en sens opposés,* Journ. f. Math., 11, 1846) e da A. Serret (*Sur la surface réglée dont les rayons de courbure sont égaux et dirigés en sens contraires,* Ivi). — Un'altra importantissima classe di superficie minime è costituita da quelle algebriche, delle quali trattano le memorie seguenti: Geiser, *Note über die algebraischen Minimumsflächen* (Math.

(1) Questo scritto si apre con una magistrale notizia storica sulle ricerche più antiche intorno alle superficie di area minima.

(2) I lavori dello Schwarz sulle superficie d'area minima sono riunite nel t. 1 delle sue *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, 1 (Berlin, 1890).

Ann., 3, 1871); Henneberg, *Bestimmung der niedrigsten Classenzahl der algebraischen Minimalflächen* (Ann. di Mat., II, 9, 1878); Lie, *Beiträge zur Theorie der Minimalflächen* (Math. Ann., 14 e 15, 1879); C. Schilling, *Die Minimalfläche 5. Classe* (Diss. Göttingen, 1880); Sturm, *Reingeometrische Untersuchungen über algebraischen Minimalflächen* (Journ. f. Math., 105, 1889).

Alla determinazione sperimentale delle superficie d'area minima limitate da un dato contorno si riferiscono le celebri esperienze di Plateau (1801-1883) (1); alla determinazione teorica di esse molti importanti scritti, fra i quali spiccano i seguenti dello Schwarz: *Ueber die Minimalflächen deren Begrenzung als ein von vier Kanten eines regulären Tetraeders gebildetes räumliches Vierseit gegeben ist* (Berliner Ber., 1865), *Bestimmung einer speciellen Minimalflächen* (Berlin, 1867), *Fortgesetzte Untersuchungen über specielle Minimalflächen* (2) (Berliner Ber., 1872), *Ueber ein Modell eines Minimalflächenstückes welches längs seiner Begrenzung vier gegebene Ebenen rechtwinklig trifft* (Ivi), *Ueber diejenigen Minimalflächen, welche von einer Schaar von Kegeln zweiten Grades eingehüllt werden* (Journ. f. Math., 80, 1875), *Ueber einige nicht algebraische Minimalfläche welche eine Schar algebraischer Curven enthalten* (Id., 87, 1879), *Sur les surfaces à courbure moyenne nulle sur lesquelles on peut limiter une portion finie de la surface par quatre droites situées sur la surface* (C. R., 96, 1883), *Ueber specielle zweifach zusammenhängende Flächenstücke, welche kleineren Flächeninhalt besitzen als alle benachbarten, von denselben Randlinien begrenzten Flächenstücke* (Götting. Abh., 34, 1887), e *Zur Theorie der Minimalflächen, deren Begrenzung aus geradlinigen Strecken besteht* (Berliner Ber., 1894).

Le altre speciali superficie d'area minima non possono riunirsi in classi, sicchè preferiamo dare qui l'elenco in ordine cronologico delle memorie relative, fidando che il loro titolo ne indicherà a sufficienza il tema: C. W. B. Goldschmidt (1807-1851), *Determinatio superficiae minimae rotatione curvae data*

---

(1) V.: *Statique expérimentale et théorique des liquides* (Gand et Leipzig, 1873).
(2) Ivi è esposta la soluzione completa del problema seguente enunciato da Gergonne nel 1816 (Ann. de Math., 7): " Tagliare un cubo in due parti per modo che la sezione sia limitata da due diagonali opposte e sia di area minima ".

duo puncta jungentis circa datum axe ortae (Goettingae, 1831); M. Roberts, *Discussion analytique de deux surfaces particulières qui jouissent de la propriété d'avoir pour chacun de leurs points les deux rayons de courbure égaux et de signes contraires* (Journ. de Math., 8, 1850); Padula, *Nota intorno a due superficie i cui raggi di curvatura sono eguali e diretti in parti opposte* (Napoli Rend., 1852); Bonnet, *Note sur la théorie générale des surfaces* (C. R., 37, 1853); A. Serret, *Sur la moindre surface comprise entre des lignes droites données, non situées dans le même plan* (C. R., 40, 1855); Lamarle (1806-1875), *Note sur une classe particulière de surfaces à aire minime* (Journ. de Math., II, 4, 1859); Schondorff, *Ueber die Minimalflächen, die von einem doppelt-gleichschenkligen räumlichen Viereck begrenzt wird* (Göttingen, 1868); Henneberg, *Ueber solche Minimalflächen, welche eine vorgeschriebene ebene Curve zur geodätischen Linie haben* (Diss. Heidelberg, 1875) e *Ueber diejenige Minimalfläche, welche die Neil'sche Parabel zur geodetischen Linien hat* (Vierteljahrsschrift der Zürcher Naturf. Ges., 21, 1876); Cayley, *On a Special Surface of Minimum Area* (Quart. Journ., 14, 1876); Schilling, *Die Minimalfläche fünfter Klasse mit dem Stereoscop-Bild eines Modells derselben* (Diss. Göttingen, 1880); Enneper, *Ueber Flächen mit besonderen Meridiancurven* (Götting. Abh., 29, 1882; cfr. H. Tallqvist, *Construction eines Modelles einer speciellen Minimalfläche,* Öfv. af finske Vetenskaps-Societetens Förh., 31, 1888-89); E. Neovius, *Bestimmung zweier speciellen periodischen Minimalflächen, auf welchen unendlich viele gerade Linien und unendlich viele ebene geodätische Linien liegen* (Helsingfors Afh., 1883) e *Untersuchungen einiger Singularitäten, welche im Inneren und auf der Begrenzung von Minimalflächenstücken auftreten können, deren Begrenzung von geradlinigen Strecken gebildet wird* (Acta Soc. Fennicae, 16, 1886); Lilienthal, *Ueber Minimalflächen, welche durch elliptische Integrale darstellbar sind* (Journ. f. Math., 99, 1886); Weingarten, *Ueber die durch eine Gleichung von der Form* $\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}=0$ *darstellbaren Minimalflächen* (Götting Nachr., 1887); E. Götting, *Bestimmung einer speciellen Gruppe nicht algebraischen Minimalflächen welche eine Schaar von reellen algebraischer Curven enthalten* (Diss. Göttingen, 1887); Dobriner, *Die Minimalflächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien* (Acta, 10, 1887); F. Bohnert, *Bestimmung einer speciellen periodischen Minimalfläche, auf welcher unendlich viele gerade Linien und unendlich viele ebene geodätische*

Linien liegen (Diss. Göttingen, 1888); Vivanti, *Ueber Minimalflächen* (Zeitschr. f. Math., 33, 1888); W. Thienemann, *Ueber eine transcendente Minimalfläche, welche eine Schar algebraischer Raumcurven 4ᵗᵉⁿ Grades enthält* (Diss. Giessen, 1890); Peche, *Analytische Bestimmung aller Minimalflächen, welche eine Schar reeller Parabeln enthalten* (Diss. Göttingen, 1891); Glaser, *Ueber die Minimalflächen* (Diss. Tübingen, 1891); Schönflies, *Sur les surfaces minima limitées par quatre arêtes d'un quadrilatère gauche* e *Sur les équations de deux surfaces minima périodiques, possédant la symétrie de l'octaèdre* (C. R., 112, 1891); Cosserat, *Sur les courbes algébriques à torsion constante et sur les surfaces minima algébriques inscrites dans une sphère* (C. R., 120, 1895).

10. Proseguendo lo svolgimento del nostro programma, diremo ora colla massima brevità possibile quali siano i punti più salienti della seconda delle opere a cui, come già annunciammo (n. 4), trovansi in embrione le più importanti teorie costituenti la geometria differenziale.

Già fin dal primo § delle *Disquisitiones generales circa superficies curvas* c'imbattiamo in una nozione originale, quella di " rappresentazione sferica „ di una superficie su di un'altra (1), la cui fecondità, già segnalata da Gauss, fu messa poi in luce meridiana dai numerosi seguaci che ebbe il grande geometra e fra i quali ci piace ricordare i nomi del Darboux (*Sur la représentation sphérique des surfaces,* C. R., 57, 1868; 58, 1869; 94, 1882; 96, 1883; Ann. Éc. norm., III, 5, 1888), del Ribaucour (*Sur la représentation sphérique des surfaces,* C. R., 75, 1872) e del Guichard (*Sur les propriétés géométriques qui ne dépendent que de la représentation sphérique,* C. R., 116, 1893). — Poco dopo (§ IV) incontriamo le " coordinate curvilinee di un punto di una superficie „, cioè quelle due variabili indipendenti in funzione delle quali sono esprimibili le coordinate ortogonali di un punto qualunque della superficie stessa (cfr. anche i §§ XVII e XIX). Nel § VI troviamo la soluzione definitiva di un problema alla soluzione del quale si affaticarono, non senza qualche frutto Eulero e

(1) Essa era stata già incidentalmente incontrata da O. Rodrigues nelle *Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbes des surfaces* (Corr. Éc. pol., 3, 1815).

Meusnier (cfr. n. 4), si affaticò indarno Sofia Germain (1776-1831) (*Mémoire sur la courbure des surfaces,* Journ. f. Math., 7, 1831), quello cioè di misurare la curvatura di una superficie in un punto. Gauss risolse tale importantissima questione generalizzando il procedimento che mena alla misura della curvatura in un punto di una linea piana o gobba, e giunse ad assegnare come misura della curvatura o (" curvatura integra ") in un punto ordinario di una superficie il prodotto delle curvature in quel punto delle relative sezioni normali principali (*Disquisitiones etc.*, § VIII) (1), mentre la citata scienziata francese aveva sostenuto, che, per raggiungere quello scopo, si deve considerare la somma delle curvature suddette. Dopo Gauss, altri matematici si occuparono della medesima questione, sia per esporre delle considerazioni somiglianti a quelle che egli istituì, ma conducenti a risultati differenti (2), sia per sostenere la convenienza di scegliere altre funzioni delle curvature principali in un punto di una superficie per misurare la curvatura di essa in quel punto (3). La curvatura integra di una superficie in un punto si può esprimere tanto se si conosce l'equazione della superficie in coordinate cartesiane (*Disquisitiones etc.*, §§ VII e IX), quanto se sulle superficie sia stabilito un sistema di coordinate curvilinee (Id., §§ X e XI): però i calcoli eseguiti da Gauss per ottenere le espres-

(1) Lo studio della curvatura di una superficie in un suo punto singolare fu fatta dal Painvin (*Courbure en un point multiple d'une surface,* Journ. f. Math., 72, 1870), dal De Salvert (*Mémoire sur les ombilics coniques,* Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles, 7, 1882) e dal Bioche (*Sur un mémoire de Poisson,* Bull. S. M. F., 14, 1883; cfr. Poisson, *Mémoire sur la courbure des surfaces,* Journ. f. Math., 7, 1832).

(2) E. Roger, *Note sur la courbure des surfaces* e *Note sur quelques propriétés des surfaces courbes* (C. R., 69, 1869); Minding, *Ueber die mittlere Krümmung der Fläche* (Pétersbourg Bull., 20, 1875); R. Sturm, *Ein Analogon zu Gauss' Satz von der Krümmung der Fläche* (Math. Ann., 19, 1883); A. Voss, *Zur Theorie der Krümmung der Flächen* (Id., 29, 1891).

(3) Casorati, *Nuova definizione della curvatura delle superficie e suo confronto con quella di Gauss* (Rend. Ist. Lomb., II, 22) e *Mesure de la courbure des surfaces suivant l'idée commune. Ses rapports avec les mesures de courbure Gaussienne et moyenne* (Acta, 14, 1889; cfr. Catalan, *Sur la courbure des surfaces,* Id., 15, 1891); la funzione dei raggi principali di curvatura R_1 e R_2 che il Casorati propose di assumere per misura della curvatura è $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}\right)$; ad accogliere tale proposta si oppone il fatto che non è in essa tenuto alcun conto dei segni delle curvature principali: ciò non toglie che le considerazioni svolte dall'autore a sostegno della sua idea siano ingegnose e piene d'interesse.

sioni corrispondenti non hanno tutta la semplicità ed eleganza possibili, donde lo stimolo ai perfezionamenti che ad essi arrecarono il Baltzer (1818-1887) (*Ableitung der Gauss'schen Formel für die Flächenkrümmung,* Leipziger Ber., 24, 1872) e l'Escherisch (*Ableitung des allgemeinen Ausdrucks für das Krümmungsmaass,* Arch. der Math., 57, 1875) (1).

È opportuno segnalare subito i seguenti scritti a noi noti tendenti a commentare variamente le ricerche di Eulero e Gauss sulla teoria della curvatura delle superficie: Plücker, *Ueber die Krümmung einer beliebigen Fläche in einem gegebenen Punkte* (Journ. f. Math., 3, 1828); Abel Transon (1805-1876), *Recherches sur la courbure des lignes et des surfaces* (Journ. de Math., 6, 1841); Brioschi, *Sopra il prodotto reciproco dei raggi di curvatura di una superficie* (Tortolini Ann., 3, 1852); Chelini (1802-1878), *Sulle formole fondamentali risguardanti la curvatura delle superficie e delle linee* (Id., 4, 1853) e *Della curvatura delle superficie con metodo diretto ed intuitivo* (Bologna Mem., II, 8, 1868); Beltrami, *Di alcune formole relative alla curvatura delle superficie* (Tortolini Ann., 4, 1853); La Gournerie, *Études sur la courbure des surfaces* (Journ. de Math., 20, 1855); Vieille, *Remarques sur la théorie des lignes de courbure, et spécialement sur la plus courte distance de deux normales infiniment voisines dont l'une passe par un umbilic* (Ivi); Codazzi, *Sulla teoria delle coordinate curvilinee e sul luogo dei centri di curvatura di una superficie qualunque* (Tortolini Ann., 8, 1857); Curtis, *Sur la surface lieu des centres de courbure principaux d'une surface courbe* (Journ. de Math., II, 3, 1858); Aoust, *Sur la courbure des surfaces* (C. R., 67, 1868); Mannheim, *Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle expression de la théorie de la courbure des surfaces* (Journ. de Math., II, 17, 1872) e *Mémoire d'optique géométrique contenant la théorie du point représentatif d'un élément de surface reglée et son emploi, tant pour la démonstration nouvelles

(1) A Liouville (*Sur la théorie générale des surfaces,* Journ. de Math., 16, 1851), al Warren (*An improved Form of Writing the Formule of C. F. Gauss for the Measure of Curvature,* Quart. Journ., 16, 1879) e al Voss (*Ueber die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie,* Münchener Ber., 1892) si devono delle nuove ed eleganti espressioni della curvatura di una superficie in coordinate curvilinee. Al Painvin invece si deve il calcolo della *Courbure en un point d'une surface définie par son équation tangentielle* (Journ. de Math., II, 17, 1872; cfr. C. R., 73, 1871).

de théorèmes rélatifs à la courbure des surfaces que pour la détermination plane des éléments des surfaces caustiques (Lincei Mem., IV, 1, 1884-85); Halphen, *Propriétés relatives à la courbure de la développée d'une surface quelconque* (C. R., 80, 1875) e *Sur un point de la théorie des surfaces* (Ivi); A. Serret, *Sur la courbure des surfaces* (C. R., 74, 1877); De Salvert, *Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces* (Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles 5, 1881; cfr. G. Loria, *Sulla teoria della curvatura delle superficie*, Riv. di Mat., 2, 1890) e *Note sur la théorie de la surface indicatrice des courbures* (Id., 8, 1884); Dietrich, *Das Verhältniss der Hauptkrümmungsradien an einem Flächenpunkt, gemessen durch den Winkel der zugehörigen Inflexionstangenten* (Zeitschr. f. Math., 26, 1881); Demartres, *Sur la courbure totale des surfaces* (Bull. S. M. F., 15, 1887) e *Sur un point de la théorie des surfaces* (Ivi); Lilienthal, *Ueber die Krümmung der Curvenschaaren* (Math. Ann., 32, 1888) e *Zur Theorie der Krümmung der Flächen* (Id., 39, 1891); Gilbert, *Sur l'emploi des cosinus directeurs de la normale dans la théorie de la courbure des surfaces* (Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles, 18, 1894).

Nè si può lasciar passare inosservato che l'interessante studio delle alterazioni che subisce la curvatura di una superficie quando a questa vengano applicate delle speciali trasformazioni univoche venne fatto negli articoli seguenti: Franke, *Sur la courbure des surfaces réciproques* (Journ. de Math., III, 3, 1877); Mehmke, *Krümmungs-Eigenschaften der räumlichen Inversion* (Böklen Mitth., 4, 1891), *Ueber zwei die Krümmung von Curven und das Gauss'sche Krümmungsmass von Flächen betreffende carackteristische Eigenschaften der linearen Punkttransformationen* (Zeitschr. f. Math., 36, 1891), *Ueber die geodätische Krümmung der auf einer Fläche gezogenen Curven und ihre Aenderung bei beliebiger Transformation der Flächen* (Id., 37, 1892) e *Einige Sätze über die raumliche Collineation und Affinität welche sich auf die Krümmung der Curven und Flächen beziehen* (Ivi), *Untersuchungen über die auf die Krümmung von Curven und Flächen bezüglichen Eigenschaften der Berührungtransformationen* (Id., 38, 1893). Dello stesso ordine sono le ricerche del Vivanti, *Ueber diejenigen Berührungstransformationen, welche das Verhältniss des Krümmungsmasses irgend zwei sich berührender Flächen im Berührungspunkte unverändert lassen* (Zeitschr. f. Math.,

37, 1892) e del Demoulin, *Sur les relations qui existent entre les éléments infinitésimaux de deux surfaces polaires réciproques* (C. R., 114, 1892), e *Sur la rélation qui existe entre les courbures totales de deux surfaces polaires réciproques par rapport à un paraboloïde de révolution* (Bull. S. M. F., 21, 1893).

11. Nell'espressione della curvatura in coordinate curvilinee p, q, entrano soltanto i coefficienti dell'elemento lineare della superficie $ds^2 = Edp^2 + 2Fdp.dq + Gdq^2$ e le loro derivate; di tali cofficienti Gauss per primo fece rilevare la straordinaria importanza per lo studio delle condizioni di applicabilità (senza rotture nè duplicature) di una superficie su di un'altra (§ XII). Ed appunto il problema dell'applicabilità lo guidò ad avvertire la convenienza di considerare le superficie, non come limiti di solidi, ma sibbene come corpi infinitamente sottili, flessibili ed inestendibili (§ XIII). Seguendo questo ordine di idee egli giunse a scoprire la prerogativa più cospicua della curvatura integra, quella cioè di essere un " invariante di flessione ", a dimostrare cioè che comunque si fletta una superficie la sua curvatura in un punto non muta (1). Laonde per l'applicabilità di una superficie su un'altra è *condizione necessaria* che fra esse si possa stabilire una corrispondenza tale che in punti corrispondenti la curvatura sia la medesima. Ma due superficie soddisfacenti a tale condizione non sono sempre applicabili l'una all'altra (2), a meno che entrambe non siano di curvatura costante; dell'importante ricerca delle *condizioni sufficienti* per l'applicabilità trattò più tardi il Minding nel notevole articolo dedicato appunto alla questione *Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht* (Journ. f. Math.,

---

(1) Altre dimostrazioni di questa importante proprietà si apprendono dagli articoli seguenti: Liouville, *Sur un théorème de M. Gauss, concernant le produit des deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface* (Journ. de Math., 12, 1847; e Nota IV a Monge); Bertrand, *Démonstration d'un théorème de M. Gauss* (Id., 13, 1848); Diguet, *Note à l'occasion de l'article précédent* (Ivi); Puiseux, *Sur le même théorème* (Ivi); Beltrami, *Sulla teoria generale delle superficie* (Atti Ist. Ven., 5, 1869); Stäckel, *Zur Theorie des Gauss'schen Krümmungsmaasses* (Journ. f. Math., 111, 1893).

(2) P. Stäckel ed A. Wangerin in due articoli *Zur Theorie des Gauss'schen Krümmungsmaasses* (Leipziger Ber., 1893) hanno somministrato degli esempî assai interessanti dell'insufficienza della condizione suddetta per l'applicabilità di due superficie.

19, 1839) (1); egli ha così inaugurata la magnifica collezione di memorie sull'applicabilità delle superficie le une sulle altre, di cui ci sembra opportuno nominar qui gli elementi più cospicui, accordando il posto d'onore alle tre che meglio risposero al tema: " studio delle superficie che si possono applicare le une sulle altre senza rotture nè duplicature ", proposto nel 1858 dall'Accademia di Parigi pel gran premio delle scienze matematiche; sono: Bour (1832-1866), *Théorie de la déformation des surfaces* (Journ. Éc. pol., 59e cah., 1861) (2); O. Bonnet, *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* (Id., 61e cah., 1865, e 62e cah., 1867); D. Codazzi, *Mémoire relatif à l'application des surfaces les unes sur les autres* (3) (Mém. pres., 27, 1882; cfr. la nota dallo stesso autore *Intorno alle superficie le quali deformandosi ritengono le stesse linee di curvatura,* Tortolini Ann., 7, 1856). Il medesimo tema venne poi più tardi variamente svolto nei seguenti scritti: Weingarten. *Ueber eine Klasse aufeinander abwickelbaren Flächen* (Journ. f. Math., 59, 1861), *Eine neue Klasse aufeinander abwickelbaren Flächen* (Götting. Nachr., 1887), *Ueber die Theorie der aufeinander abwickelbaren Oberflächen* (Festsschrift der technischen Hochschule, Berlin, 1884), e *Sur la théorie des surfaces applicables* (C. R., 112, 1891); Dini, *Sull'equazione differenziale delle superficie applicabili su una superficie data* (Giorn. di Mat., 2, 1864); Moutard, *Sur la déformation des surfaces* (Bull. Soc. phil., 1869); Ribaucour, *Sur la théorie de l'application des surfaces les unes sur les autres* (Ivi) e *Sur la déformation des surfaces* (C. R., 70, 1870); A. Razzaboni, *Sopra alcune superficie gobbe applicabili* (Giorn. di Mat., 21, 1884); Combescure, *Sur l'application des surfaces* (C. R., 105, 1887); Goursat, *Sur la théorie des surfaces applicables* (C. R., 112, 1891), *Sur le théorème de M. Weingarten et sur la théorie des surfaces applicables* (Toulouse Ann., 5, 1891) e *Sur*

---

(1) Cfr. anche gli articoli del medesimo geometra: *Ueber die Biegung gewisser Flächen* (Journ. f. Math., 18, 1838) e *Ueber einen besonderen Fall bei den Abwickelung krummer Flächen* (Id., 20, 1840).

(2) Cfr. Cayley, *On the Gaussian Theory of Surfaces* (Proc. L. M. S., 12, 1881).

(3) Si noti a tale proposito, che le importantissime equazioni dimostrate ed applicate in questa memoria e che si designano d'ordinario col nome di " formole Codazzi ", furono scoperte dal Mainardi, come emerge dalla memoria di questo *Su la teoria generale delle superficie* (Giorn. dell'Ist. Lomb., 9, 1856).

un problème relatif à la déformation des surfaces (Am. Journ., 14, 1891); Mlodzieiowski, *Sur la déformation des surfaces* (Bull. Sc. math., II, 15, 1891); Raffy, *Sur une transformation des formules de Codazzi et sur les caractères spécifiques des surfaces applicables sur les surfaces à courbure moyenne constante* (Bull. S. M. F., 20, 1892) e *Sur le problème général de la déformation des surfaces* (C. R., 114, 1892); Caronnet, *Sur les couples des surfaces applicables* (Bull. S. M. F., 21, 1893); P. Adam, *Sur la déformation des surfaces* (Id., 23, 1895), *Sur la déformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure* (Ivi), e *Mémoire sur la déformation des surfaces* (Ivi); Stäckel, *Sur un groupe continu de transformations avec vingt-huit paramètres qu'on rencontre dans la théorie de la déformation des surfaces* (C. R., 121, 1895); Genty, *Sur la déformation infinitésimales des surfaces* (Toulouse Ann., 9, 1895).

A questi scritti si connettono altri relativi alle deformazioni che possono subire le superficie; i principali sono i seguenti: Beltrami, *Sulla flessione delle superficie rigate* (Ann. di Mat., 7, 1865); Enneper, *Ueber die Biegung einiger Flächen* (Götting. Nachr., 1875); Weingarten, *Ueber die Deformation einer biegsamen unausdehnbaren Flächen* (Journ. f. Math., 100, 1876) e *Ueber die unendlich kleine Deformation einer biegsamen, unausdehnbaren Flächen* (Berliner Ber., 1886); Bianchi, *Sopra la deformazione di una classe di superficie* (Giorn. di Mat., 16, 1878); Volterra, *Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili* (Lincei Rend., IV, 1, 1885); Chini, *Sopra alcune deformazioni delle superficie rigate* (Torino Atti, 26, 1890).

12. Ritorniamo ancora una volta alla fondamentale memoria di Gauss da cui questa lunga digressione ci ha allontanati. La parte residua di essa concerne le linee di lunghezza minima fra due punti o, adottando il nome proposto da Liouville, le linee " geodetiche " (1). Di queste (2) viene da Gauss deter-

---

(1) Legendre nel *Mémoire sur les opérations trigonométriques dont les résultats dépendent de la figure de la terre* (Paris, 1787) le chiamò invece " linee minime ".

(2) Nelle indagini intorno alle linee geodetiche Gauss non fu senza precursori. Infatti il problema che consiste nel determinare tali linee s'incontra nel corso delle discussioni che accompagnarono le origini del calcolo infinitesimale. Anzi Giovanni Bernoulli avvertì la proprietà caratteristica di

minata l'equazione differenziale (§ XIV e XVIII), la cui integrazione venne poi studiata da egregi geometri (1); l'analogia di esse con le rette del piano condusse Gauss ad una notevole estensione dell'ordinario sistema di coordinate polari nel piano (2) ed al concetto di " circoli geodetici „ (§ XV) (3) e di " curve geodeticamente parallele „ (§ XVI); nè va dimenticata la determinazione fatta da Gauss della curvatura totale di un triangolo geodetico, il risultato della quale venne poi generalizzato dallo Schering (4).

Argomenti analoghi a quelli trattati in questa parte della memoria di Gauss sono svolti nei seguenti scritti: Steiner, *Ueber einige allgemeine Eigenschaft der Curven von doppelter Krümmung* (Berliner Ber., 1839); Minding, *Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen* (Journ. f. Math., 20, 1840) (5); Beltrami, *Sulla teoria delle linee geodetiche* (Rend. Ist. Lomb., II, 1, 1868); Christoffel, *Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke* (Berliner Abh., 1869); Darboux, *Sur une série de lignes analogues aux géodésiques* (Ann. Éc. norm., 7, 1870); Cayley, *On Geodesic Lines, in particular those of a Quadric Surface* (Proc. L. M. S.,

---

tali curve, di avere come piano osculatore in ogni loro punto un piano normale della superficie su cui sono tracciate. Nè in quell'epoca i geometri stettero sempre nel campo delle generalità, chè anzi studiarono le geodetiche sopra alcune superficie particolari, quali sarebbero le sviluppabili e le superficie di rivoluzione. Ma l'angustia dello spazio vieta a noi d'addentrarci in queste indagini storiche minute; al nostro silenzio il lettore potrà sopperire facilmente ricorrendo alle eccellenti *Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien* di P. Stäckel (Leipziger Ber., 45, 1893).

(1) Liouville, *Théorème concernant l'intégration de l'équation des lignes géodésiques* (Nota III a Monge); Brioschi, *Sulla integrazione della equazione delle geodetiche* (Tortolini Ann., 4, 1853); ecc.

(2) V. anche O. Bonnet, *Démonstration des propriétés fondamentales du système de coordonnées polaires géodésiques* (C. R., 97, 1883) e *Démonstration nouvelle de deux théorèmes de M. Bertrand* (Ivi).

(3) Cfr.: Darboux, *Sur les cercles géodésiques* (C. R., 96, 1883); Lie, *Ueber die allgemeinste geodätische Abbildung der geodätischen Kreisen einer Fläche* (Arch. for Math. og Nat., 9, 1884) e *Bestimmung des Bogenelements aller Flächen deren geodätischen Kreise eine infinitesimale Berührungstransformation gestatten* (Ivi).

(4) *Erweiterung des Gauss'schen Fundamentalsatzes für Dreiecke in stetig gekrümmten Flächen* (Götting. Nachr., 1867).

(5) Sono in certo modo analoghe alle geodetiche le linee studiate dallo stesso Minding nelle memorie *Ueber die Curven des kürzesten Perimeters auf krummen Flächen* (Journ. f. Math., 5, 1830) e *Zur Theorie der Curven kürzesten Umrings, bei gegebenem Flächeninhalt, auf krummen Flächen* (Id., 86, 1879), e dal Delaunay nella *Note sur la ligne de longueur donnée qui renferme une aire maximum sur une surface* (Journ. de Math., 8, 1843).

IV, 1871-73); Hoppe, *Untersuchungen über kürzeste Linien* (Arch. f. Math., 64, 1879); Braunmühl, *Ueber Enveloppen geodetischer Linien* (Math. Ann., 14, 1879), e *Ueber die reducierte Länge eines geodätischen Bogens und die Bildung jener Fläche, deren Normale eine gegebene Fläche berühren* (München, 1883); Lie, *Classification der Flächen nach den Transformationsgruppe ihrer geodetischen Curven* (Universitätsprogramm, Christiania, 1879) e *Untersuchungen über geodätischen Curven* (Math. Ann., 20, 1882); O. Böklen, *Ueber geodätische Linien* (Zeitschr. f. Math., 26, 1881); Mangoldt, *Ueber diejenigen Punkten auf positiv gekrümmten Flächen, welche die Eigenschaft haben, dass die von ihnen ausgehenden geodätischen Linien, nie aufhören kürzeste Linie zu sein* (Journ. f. Math., 91, 1881), e *Ueber die Classification der Flächen nach den Verschiebbarkeit ihrer geodätischen Dreiecke* (Id., 94, 1883); Weingarten, *Ueber die Veschiebbarkeit geodätische Dreiecke in krummen Flächen* (Berliner Ber., 1882); Brill, *Zur Theorie der geodätischen Linien und des geodätischen Dreiecks* (Münchener Abh., 14, 1883); Lüroth, *Ueber die Bestimmung einer Fläche durch geodätische Messungen* (Münchener Ber., 22, 1892); Ricci, *Sulla teoria delle linee geodetiche e dei sistemi isotermi di Liouville* (Atti Ist. Ven., VII, 5, 1893-94); Koenigs, *Mémoire sur les lignes géodésiques* (Mém. prés., II, 31, 1894; un sunto di essa è inserito in Toulouse Ann., 6, 1892) (1).

I §§ XXI e XXII del grande lavoro di Gauss sono gli ultimi che ci interessano, perchè gli altri non trattano che questioni di geodesia; essi, riferendosi alle trasformazioni che può subire l'elemento lineare di una superficie quando si cambiano le linee coordinate, porgono elementi preziosi per lo studio delle coordinate curvilinee su una superficie, e sono preliminari remoti di quegli importantissimi e geniali studî che dimostrarono essere la geometria differenziale delle superficie non altro che un capitolo della teoria delle forme differenziali quadratiche. Il più antico lavoro procedente in tale direzione è, per quanto a noi consta, quello di Felice Casorati (1835-1890) (2) intitolato

(1) I punti di contatto fortuiti esistenti fra le memorie or citate del Ricci e del Koenigs diedero luogo ad alcune note di questi geometri in Lincei Rend., V, 3, 1893_1 e 1893_2.

(2) Cfr.: G. Loria, *Cenni intorno a Felice Casorati* (Palermo Rend., 5, 1891); E. Bertini, *Commemorazione del M. E. prof. Felice Casorati* (Rend. Ist. Lomb., II, 25, 1892).

Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superficie curve (Ann. di Mat., 3, 1860, e 4, 1861); ad esso seguono le rinomate *Ricerche di analisi applicata alla geometria* che il Beltrami pubblicò nel Giorn. di Mat. (2, 1864, e 3, 1865) (1), poi il lavoro di questo stesso autore *Delle variabili complesse su una superficie qualunque* (Ann. di Mat., II, 1. 1867), il quale prelude alla *Teoria generale dei parametri differenziali* (Bologna Mem., II, 8, 1868; cfr. l'articolo *Zur Theorie des Krümmungsmasses*, Math. Ann., 1, 1869). Questa teoria venne poi ulteriormente sviluppata dal Ricci nei seguenti scritti: *Principî di una teoria delle forme differenziali quadratiche* (Ann. di Mat., II, 12, 1884), *Sui parametri e gli invarianti differenziali delle forme quadratiche differenziali* (Id., II, 14, 1886), *Delle derivazioni covarianti e controvarianti e del loro uso nell'analisi applicata* (Studî offerti dall'Università Padovana alla Bolognese nell'VIII Centenario ecc., 3, Padova, 1888) (2), e *Sulla teoria intrinseca delle superficie ed in ispecie di quelle di 2° grado* (Atti Ist. Ven., VII, 6, 1894-95). Indirizzo analogo hanno i trattati del Knoblauch e del Bianchi di cui il lettore apprenderà l'esistenza nella chiusa del presente Cap., e le seguenti memorie: E. Padova, *Sulla teoria generale delle superficie* (Bologna Mem., IV, 10, 1890); J. Knoblauch, *Ueber Fundamentalgrössen in der Flächentheorie* (Journ. f. Math., 103, 1888), *Ueber die geometrische Bedeutung der flächentheoretischen Fundamentalgleichungen* (Acta, 15, 1891), *Ueber Biegungscovarianten* e *Zur Theorie der Differentialparameter* (Journ. f. Math., 111, 1893); R. Lilienthal, *Zur Krümmungstheorie der Flächen* (Id., 104, 1889).

13. Come derivazioni del classico lavoro di Gauss sono da considerarsi le ricerche intorno ad alcune classi di superficie speciali di cui non abbiamo ancora parlato. Spiccano fra esse quelle a curvatura costante positiva o negativa (3): dalla

---

(1) Si connettono in certo modo a questo lavoro del Beltrami le due note di V. Reina, *Sulle linee coniugate di una superficie* (Lincei Rend., IV, 6, 1890_1) e *Di alcune formole relative alla teoria delle superficie* (Id., 1890_2).

(2) Cfr. il *Résumé de quelques travaux sur les systèmes variables de fonctions associés à une forme différentielle quadratique* (Bull. Sc. math., II, 16, 1892).

(3) Queste ultime superficie, seguendo il Beltrami, si dicono " pseudosferiche ".

ricchissima letteratura su questo argomento scegliamo, per consigliarne la lettura ai giovani geometri, i seguenti lavori (1): Codazzi, *Intorno alle superficie le quali hanno costante il prodotto de' due raggi di curvatura* (Tortolini Ann., 8, 1857); Beltrami, *Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette* (Ann. di Mat., 7, 1865; cfr. Padova, *Sopra un teorema di geometria differenziale,* Rend. Ist. Lomb., II, 23, 1890) (2); P. Simon, *Ueber Flächen mit constantem Krümmungsmaass* (Diss. Halle, 1876); Enneper, *Bemerkungen über einige Flächen mit constantem Krümmungsmaass* (Götting. Nachr., 1876); Lie, *Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung* (Arch. for Math. og Nat., 4, 1879, e 5, 1880); Bianchi, *Ricerche sulle superficie a curvatura costante e sulle elicoidi* (Pisa Ann., 2, 1879), *Ueber die Flächen mit constanter negativen Krümmung* (Math. Ann., 16, 1880), *Sulle superficie a curvatura costante positiva* (Giorn. di Mat., 20, 1882), e *Sulla trasformazione di Bäcklund per le superficie pseudosferiche* (Lincei Rend., V, 1, 1892_2); Hazzidakis, *Ueber einige Eigenschaften der Flächen mit constantem Krümmungsmass* (Journ. f. Math., 88, 1879); Weingarten, *Ueber die Eigenschaften des Linienelementes der Flächen von constantem Krümmungsmass* (Journ. f. Math., 94 e 95, 1883); Darboux, *Sur la surface dont la courbure totale est constante* (C. R., 97, 1883; Ann. Éc. norm., III, 7, 1890); Bäcklund, *Om ytar med konstant negativ krökning, avec un Résumé en français* (Lunds Universitets Aarskrift, 19, 1884); Dobriner, *Die Flächen constanter Krümmung mit einem System sphärischer Krümmungslinien dargestellt mit Hilfe von Θ-Functionen zweier Variabeln* (Diss. Marburg, 1886; Acta, 9, 1886-87); R. Liouville, *Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbure constante* (Am. Journ., 10, 1888); Guichard, *Recherches sur les surfaces à courbure totale constante et sur certaines surfaces qui s'y rattachent* (Ann. Éc. norm., III, 7, 1890).

Un'altra categoria di superficie che, specialmente in questi ultimi tempi, venne con predilezione studiata dai geometri è quella composta delle superficie il cui elemento lineare è riducibile ad

---

(1) Ad essi si possono aggiungere quelli del Beltrami, dell'Escherich, del Brioschi e del Reina che citeremo nel n. 6 del Cap. X.

(2) Le uniche superficie per cui il problema enunciato è risolubile sono appunto quelle a curvatura costante.

una forma speciale assegnata (1), in particolare, alla così detta " forma di Liouville " (2); fra le ricerche che vi si riferiscono ricorderemo quelle i cui risultati sono esposti nei seguenti scritti: Koenigs, *Sur les surfaces dont le* ds^2 *peut être ramené de plusieurs manières au type de Liouville* (C. R., 109, 1889); Raffy, *Sur un problème de la théorie des surfaces* (Bull. Sc. math., II, 13, 1889 e C. R., 108, 1889); P. Stäckel, *Eine charakteristische Eigenschaft der Flächen, deren Linienelement* ds *durch* $ds^2 = (\kappa(q_1) + \lambda(q_2))(dq_1^2 + dq_2^2)$ *gegeben wird* (Math. Ann., 35, 1889); Demartres, *Sur les surfaces réglées dont l'élément linéaire est réducible à la forme de Liouville* (C. R., 110, 1890); Waelsch, *Sur les surfaces à élément linéaire de Liouville et les surfaces à courbure constante* (Id., 116, 1893); Ricci, *Dei sistemi di coordinate atti a ridurre l'espressione del quadrato dell'elemento lineare di una superficie alla forma* $ds^2 = (U+V)(du^2+dv^2)$ (Lincei Rend., V, 2, 1893_1). Va qui citata anche una nota del Petot, *Sur les surfaces dont l'élément linéaire est réductible à la forme* $ds^2 = F(U+V)(du^2+dv^2)$ (C. R., 110, 1890).

Giova riunire a questi i lavori consacrati allo studio di altre speciali classi di superficie; i titoli di essi basteranno in generale a significare al lettore di quale particolarità godano gli enti ivi considerati: Binet, *Remarque sur une courbe qui est sa propre développée, et sur un genre de surfaces qui contiennent le lieu des centres de l'une de leurs espèces de courbures* (Journ. de Math., 6, 1841); Catalan, *Recherche des lignes de courbure de la surface lieu des points dont la somme des distances à deux droites qui se coupent est constante* (Belgique Mém. couronnées, 32, 1860), e *Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces* (Belgique Mém., 24, 1875); Laguerre, *Sur un genre particulier de surfaces dont on peut déterminer les lignes géodésiques* (Bull. S. M. F., 1, 1873); Röthig, *Der Malus'sche Satz und die Gleichungen der dadurch definierten Flächen* (Journ. f. Math.; 84, 1877), e *Ueber die durch den Malus'schen Satz definierten Flächen* (Id., 88, 1879); Bianchi, *Ricerche sulle superficie elicoidali* (Giorn. di

---

(1) Come fondamentale per tali ricerche è da considerarsi la memoria del Lipschitz: *Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenem Ausdruck des Linearelement* (Berliner Ber., 1883).

(2) È la forma $(P+Q)(dp^2+dq^2)$ ove P è funzione della sola variabile p e Q della q.

Mat., 17, 1879); Lie, *Untersuchungen über Traslationsfläche* (Leipziger Ber., 44, 1892); Lilienthal, *Allgemeine Eigenschaften von Flächen deren Coordinaten sich durch die reelle Teile dreier analytischer Functionen einer complexen Veränderlichen darstellen lassen* (Journ. f. Math., 98, 1885); Demartres, *Sur les surfaces à génératrices circulaires* (Nouv. Corr. math., 6, 1880; Ann. Éc. norm., III, 2, 1885), *Mémoire sur les surfaces qui sont divisées en carrés par une suite de cercles et leurs trajectoires orthogonales* (Ann. Éc. norm., III, 4, 1887), e *Sur les surfaces qui ont pour lignes isothermes une famille de cercles* (C. R., 104, 1887); Hazzidakis, *Flächenerzeugung durch Krümmungslinien* (Journ. f. Math., 98, 1885) (1); Molins, *Recherches sur les surfaces dont les trajectoires sous un angle constant des sections planes passant par une droite donnée ont pour perspectives des spirales logarithmiques* (Mém. de l'Acad. de Toulouse, VIII, 8, 1886); Voss, *Ueber diejenigen Flächen, auf denen zwei Scharen geodätischer Linien ein conjugiertes System bilden* (Münchener Ber., 1888; cfr.: A. Razzaboni, *Delle superficie sulle quali due serie di geodetiche formano un sistema conjugato,* Bologna Mem., IV, 9, 1889, e Guichard, *Sur les surfaces qui possèdent un réseau de géodésiques conjuguées,* C. R., 110, 1890); Appell, *Surfaces telles que l'origine se projette sur chaque normale au milieu des centres de courbure principaux* (Am. Journ., 10, 1888); Goursat, *Surfaces telles que la somme des rayons de courbure principaux est proportionnelle à la distance d'un point fixe au plan tangent* (Ivi); Fibbi, *Sulle superficie che contengono un sistema di geodetiche a torsione costante* (Pisa Ann., 5, 1888); Nannei, *Le superficie ipercicliche* (2) (Napoli Rend., II, 2, 1888; Giorn. di Mat., 26, 1888); Pirondini, *Sopra alcune superficie e curve* (Ivi), *Studio sulle superficie elicoidali* (Ann. di Mat., II, 16, 1888), *Sulle superficie di traslazione* (Id., 17, 1889), *Di alcune superficie che ammettono un sistema di linee eguali e un secondo sistema di linee eguali o simili* (Id., 23, 1895); Baroni, *Superficie Σ in cui la somma dei raggi principali di curvatura è proporzio-*

(1) Questa memoria contiene la soluzione del problema: Sotto quali condizioni una curva invariabile di forma è sempre linea di curvatura della superficie che essa genera movendosi?

(2) Sono superficie di cui le linee di curvatura di un sistema sono a flessione costante.

nale alla distanza di un punto fisso dal piano tangente (Giorn. di Mat., 28, 1890); Bianchi, *Sulle superficie le cui sezioni, fatte con un sistema di piani paralleli, tagliano le linee di curvatura sotto angolo costante* (Lincei Rend., IV, 7, 1891_1), e *Sulle superficie i cui piani principali hanno costante il rapporto delle distanze da un punto fisso* (Id., V, 3, 1894_1); Raffy, *Détermination de toutes les surfaces moulures applicables sur des surfaces de révolutions* (Bull. S. M. F., 19, 1891), e *Sur les surfaces moulures dont les lignes d'égale courbure sont parallèles* (Ivi); Caronnet, *Sur des surfaces dont les lignes de courbure s'obtiennent par quadrature* (Bull. S. M. F., 20, 1892); Probst, *Ueber Flächen mit isogonalen Systemen von geodätischen Kreisen* (Diss. Würzburg, 1893).

14. Differenti sviluppi intorno a varî punti dei classici lavori di Monge e Gauss che scegliemmo come fondamenti del presente Cap. si leggono negli scritti che seguono, il cui tema è, salvo poche eccezioni, indicato dal titolo: Bertrand, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces* (Journ. de Math., 9, 1844) e *Démonstration géométrique de quelques théorèmes relatifs à la théorie des surfaces* (Id., 13, 1848); O. Bonnet, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces* (Journ. Éc. pol., 32e cah., 1848) (1), *Note sur quelques points de la théorie des surfaces* (Id., 16, 1851), *Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes* (Id., II, 5, 1860), e *Sur la détermination du rayon de courbure des courbes tracées sur une surface et dont le plan osculateur est tangent à la surface* (Nouv. Ann., II, 4, 1865); Brioschi, *Intorno ad alcuni punti della teorica delle superficie* (Tortolini Ann., 3, 1852), e *Intorno ad alcune proprietà di una linea tracciata sopra una superficie* (Id., 5, 1854); Frenet, *Sur la théorie analytique des surfaces* (Lyon, 1854); Beltrami, *Sur la courbure de quelques lignes tracées sur une surface* (Nouv. Ann., II, 4, 1865) e *Di un sistema di formole per lo studio delle linee e delle superficie ortogonali* (Rend. Ist. Lomb. II, 5, 1872); Christoffel, *Ueber die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch locale Messungen auf*

---

(1) Ivi incontrasi la nozione di " curvatura geodetica " di una curva tracciata sopra una superficie.

derselben (Journ. f. Math., 64, 1865); Morin, *Théorèmes relatifs à la théorie des surfaces* (C. R., 66, 1868); Enneper, *Bemerkungen über den Durchschnitt der Flächen* (Götting. Nachr., 1868), *Ueber die Developpabele Fläche, gebildet aus den berührenden Ebenen längs einer Curve auf einer Fläche* (Id., 1869), e *Ueber die Developpabele Fläche, welche einer gegebenen Fläche umschrieben ist* (Zeitschr. f. Math., 15, 1870); Gilbert, *Sur la théorie générale des lignes tracées sur une surface quelconque* (Belgique Mém., 37, 1869); Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque* (Paris, 1869); Dini, *Ricerche sopra la teoria delle superficie* (Mem. Soc. XL, III, 2, 1869), e *Sopra alcune formole generali della teoria delle superficie e loro applicazioni* (Ann. di Mat., II, 4, 1870-71); Laguerre, *Sur une propriété relative aux courbes tracées sur une surface quelconque* (Bull. Soc. phil., 7, 1870), e *Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces* (Nouv. Ann., II, 11, 1872); Ribaucour, *Note sur les développées des surfaces* (C. R., 74, 1872), e *Propriétés des courbes tracées sur les surfaces* (C. R., 80, 1875; cfr. Mannheim, *Note sur une communication de M. Ribaucour,* Ivi); Cayley, *On the Geodesic Curvature of a Curve of a Surface* (Proc. L. M. S., 12, 1881); Lipschitz, *Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften* (Berliner Ber., 1882 e 1883); G. Morera, *Sui sistemi di superficie e le loro traiettorie ortogonali* (Rend. Ist. Lomb., II, 19, 1886); Lilienthal, *Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der krummen Oberflächen und geradlinigen Strahlenssysteme* (Bonn, 1886), e *Zur Theorie der Krümmungsmittelpunktsflächen* (Math. Ann., 30, 1887); Guichard, *Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables* (Ann. Éc. norm., III, 6, 1889); Kommerell, *Beiträge zur Gauss'schen Flächentheorie* (Diss. Tübingen, 1890); Pirondini, *Alcune formole relative alle linee tracciate sopra una superficie e loro applicazioni* (Ann. di Mat., II, 21, 1893); Bianchi, *Applicazioni geometriche del metodo delle approssimazioni successive di Picard* (Lincei Rend., V, 3, 1894_1), e *Sulla interpretazione geometrica del teorema di Moutard* (Ivi).

15. La bella teoria delle coordinate curvilinee su una superficie che Gauss fondò, applicando forse inconsciamente un ge-

niale concetto di Leibniz (1), non tardò a venire generalizzata allo spazio. L'estensione venne indicata in un caso particolare — quello delle coordinate ellittiche — da Lamé nel *Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température* (Mém. prés., 5, 1833 e Journ. de Math., 2, 1837) e poco dopo da Jacobi nella *Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution* (Journ. f. Math., 19, 1839; cfr. le 26ª, 27ª e 28ª delle celebri *Vorlesungen über Dynamik*); nel caso delle coordinate ortogonali in generale essa è notata in un capitolo del *Mémoire sur les lois de l'équilibre du fluide éthéré* (Journ. Éc. pol., 23ᵉ cah., 1834) dello stesso Lamé e poi sviluppata, dapprima nel *Mémoire sur les coordonnées curvilignes* (Journ. de Math., 5, 1840), e poi nel *Mémoire sur les variations des coordonnées curvilignes* (Id., 16, 1851) e nelle *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications* (Paris, 1859) (2).

Il nuovo campo dischiuso ai geometri da Lamé si rivelò fin dal principio così ubertoso di risultati importanti per la geometria e le sue applicazioni alla fisica, che il grande matematico trovò ben tosto dei numerosi seguaci in Francia e fuori; ecco gli scritti più interessanti sull'argomento in discorso: Aoust, *Des coordonnées curvilignes se coupant sous un angle quelconque* (Journ. f. Math., 58, 1861), e *Théorie des coordonnées curvilignes quelconques* (Ann. di Mat., 6, 1864; II, 2, 1868-69, 3, 1869-70, e 5, 1871-73); Combescure, *Sur les déterminants fonctionnels et les coordonnées curvilignes* (Ann. Éc. norm., 4, 1867); Brioschi, *Sulla teoria delle coordinate curvilinee* (Ann. di Mat., II, 1, 1867-68); Codazzi, *Sulla teorica delle coordinate curvilinee e sul luogo dei centri di curvatura di una superficie* (Tortolini Ann., 8, 1857), e *Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio* (Ann. di Mat., II, 1, 1867-68, 2, 1878-69, 4, 1870-71, 5, 1871-73); Chelini, *Teoria delle coordinate curvilinee nello spazio e nelle superficie* (Bologna Mem., II, 8, 1868); E. Roger, *Mémoire sur les*

---

(1) *Leibnizens Math. Schriften*, 5, p. 266-269.

(2) A malincuore, e per deficienza di spazio, tralascio di riportar qui l'eloquente epilogo di quest'opera, nel quale è chiaramente dimostrato qual parte fossero destinate a rappresentare le coordinate curvilinee nello studio matematico dei fenomeni naturali.

coordonnées curvilignes (Annales des Mines, VII, 5, 1874); Darboux, *Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux* (Ann. Éc. norm., II, 7, 1878); M. Lévy, *Mémoire sur les coordonnées curvilignes orthogonales* (Journ. Éc. pol., 43e cah., 1870); Warren, *Exercises in Curvilinear and Normal Coordinates* (Cambridge Trans., 12, 1877); Cayley, *On Curvilinear Coordinates* (Quart. Journ., 19, 1882); Padova, *Sulla teoria delle coordinate curvilinee* (Lincei Rend., IV, 4, 1888_2).

Com'è naturale, nelle applicazioni conviene di regola far uso di coordinate curvilinee rettangolari, donde la ragione per cui la ricerca dei sistemi tripli ortogonali ha occupato un sì gran numero di geometri. Fra i risultati da essi conseguiti merita il primo posto la proposizione intuita dal Bouquet (*Note sur les surfaces orthogonales,* Journ. de Math., 11, 1846) e in modo notevole precisata dal Darboux (*Sur les surfaces orthogonales,* Ann. Éc. norm., 3, 1866), la quale afferma l'incapacità di una arbitraria schiera semplicemente infinita di superficie di far parte di un sistema triplo ortogonale; alla ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè ciò accada sono consacrati i lavori seguenti: Cayley, *Sur les surfaces orthogonales* (C. R., 75, 1872), *Sur la condition pour qu'une famille de surfaces données puisse faire partie d'un système ortogonal* (Ivi), e *On Curvature and Orthogonal Surfaces* (Phil. Trans., 163, 1873); Darboux, *Sur l'équation du troisième ordre dont dépend le problème des surfaces orthogonales*, e *Sur le problème des surfaces orthogonales* (C. R., 76, 1873); Enneper, *Bemerkungen über die orthogonalen Flächen* (Götting. Nachr., 1872); Weingarten, *Ueber die Bedingung, unter welcher eine Flächenfamilie einem orthogonalen Flächensystem angehört* (Journ. f. Math., 83, 1877); Hoppe, *Ueber die Bedingung, welcher eine Flächenschaar genügen muss, um einem dreifachen orthogonalen System anzugehören* (Arch. der Math., 63, 1879); A. R. Johnson, *On Cayley's Differential Equations for Orthogonal Surfaces* (Mess., 16, 1886) (1); Ricci, *Della equazione di condi-*

(1) Ivi l'equazione differenziale di cui è parola si presenta come caso particolare di quella che caratterizza i sistemi di superficie tali che le tangenti principali variano in un determinato modo al muoversi del punto di contatto lungo una traiettoria ortogonale del sistema. A concetti simili è informato l'articolo del medesimo autore intitolato *Extension of Cayley's Differentialequation for Orthogonal Surfaces* (Quart. Journ., 22, 1886).

zione pei parametri dei sistemi di superficie che appartengono ad un sistema triplo ortogonale (Lincei Rend., V, 3, 1894_2).

Prima e dopo di tali investigazioni, la determinazione di sistemi tripli ortogonali e la deduzione di alcuni di essi da altri vennero studiate da W. Roberts (*Applications des coordonnées elliptiques à la recherche des surfaces orthogonales,* Journ. f. Math., 62, 1863; cfr. anche: C. R., 53, 1861, e Picart, *Étude géométrique sur les surfaces,* Nouv. Ann., II, 4, 1865), da R. Hoppe (*Zum Problem des dreifach orthogonalen Flächensystems,* Arch. der Math., 55, 1873, 57 e 58, 1875), e dal Mehler (*Ueber die Benutzung einer vierfachen Mannigfaltigkeit zur Ableitung orthogonaler Flächensysteme,* Journ. f. Math., 84, 1878).

Assai più copiosi sono gli scritti aventi per oggetto la ricerca delle proprietà generali dei sistemi tripli ortogonali e la loro costruzione, nonchè lo studio di quelli fra tali sistemi che godono di particolarità prestabilite (alcune di queste furono suggerite dalla teoria del calore); nell'elenco dei loro autori incontriamo molti dei più bei nomi che annoveri la storia della geometria e dell'analisi moderna, come il lettore vedrà dal catalogo che qui diamo delle principali fra le memorie a noi note sull'argomento che in questo istante ci occupa: Lamé, *Mémoire sur les surfaces orthogonales et isothermes* (Journ. de Math., 8, 1843); Bertrand, *Mémoire sur les surfaces isothermes orthogonales* (Id., 9, 1844); Bonnet, *Mémoire sur la théorie des surfaces isothermes orthogonales* (Journ. Éc. pol., 30e cah., 1845), e *Sur les surfaces isothermes et orthogonales* (Journ. de Math., 14, 1849); Bouquet, *Note sur les surfaces orthogonales* (Id., 11, 1846), e *Mémoire sur les surfaces orthogonales* (Id., 12, 1847); Brioschi, *Intorno ad alcune formole che si riscontrano nella teoria delle superficie* (Tortolini Ann., 4, 1853); Puiseux, *Note sur les systèmes de surfaces orthogonales* (Journ. de Math., II, 8, 1863); Darboux, *Remarques sur la théorie des surfaces orthogonales* (C. R., 59, 1864), *Recherches sur les surfaces orthogonales* (Ann. Éc. norm., 2, 1865), *Sur les systèmes de surfaces orthogonales* (C. R., 67, 1868), *Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques* (Id., 69, 1869) e *Sur les systèmes orthogonaux comprenant une famille de surfaces du second degré* (C. R., 84, 1877); Moutard, *Lignes de courbure d'une classe de surfaces du quatrième ordre* (C. R., 59, 1864); Schläfli, *Ueber die allgemeinste Flächenschaar zweiten Grades, die mit irgend zwei anderen Flä-*

chenschaaren ein orthogonales System bildet (Journ. f. Math., 76, 1873); A. Ribaucour, *Sur les surfaces orthogonales* (L' Institut, 37, 1869), e *Sur les systèmes cycliques* (C. R., 76, 1873) (1); Enneper, *Untersuchungen über orthogonale Flächensysteme* (Math. Ann., 7, 1874); E. Betti (1823-1892), *Sopra i sistemi tripli di superficie isoterme e ortogonali* (Ann. di Mat., II, 8, 1877); Molins, *Mémoire sur un système triple de surfaces orthogonales* (Mém. de l'Acad. de Toulouse, VIII, 1, 1879); Maschke, *Ueber ein dreifach orthogonales Flächensystem, gebildet aus Flächen dritter Ordnung* (Diss. Göttingen, 1880) (2); Bianchi, *Sopra alcune classi di sistemi tripli ciclici di superficie ortogonali* (Giorn. di Mat., 21, 1883), *Sui sistemi tripli ciclici di superficie ortogonali* (Id., 22, 1884), *Sopra una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali, che contengono un sistema di elicoidi aventi a comune l'asse ed il passo* (Ann. di Mat., II, 13, 1885), *Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten* (Ivi, e 14, 1886) (3), *Sopra i sistemi tripli di superficie ortogonali che contengono un sistema di superficie pseudosferiche* (Lincei Rend., IV, 2, 1886), *Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali* (Ann. di Mat., II, 18, 1890), *Sopra una nuova classe di superficie appartenenti a sistemi tripli ortogonali* (Lincei Rend., IV, 6, 1890_1), *Sui sistemi tripli ortogonali che contengono una serie di superficie con un sistema di linee di curvatura piane* (Ann. di Mat., 19, 1891), e *Sui sistemi tripli ortogonali di Weingarten* (Palermo Rend., 8, 1894); de Salvert, *Mémoire sur la recherche la plus générale d'un système orthogonal triplement isotherme* (Mém. de la Soc. sc. de Bruxelles, 13, 1889; 14, 1890; 15, 1891; 16, 1892); Petot, *Sur certains systèmes de coordonnées sphériques et sur les systèmes triples orthogonaux corréspondants* (C. R., 112, 1891); L. Lévy, *Sur les systèmes triplement orthogonaux où les surfaces d'une même famille sont égales entre elles* (Journ. de Math., IV, 8, 1892), *Sur certaines surfaces formant des systèmes triplement orthogonaux* (Bull. S. M. F., 20, 1892), e *Théorèmes sur les systèmes triplement orthogonaux* (C. R.,

---

(1) Un sistema triplo è *ciclico* se una delle tre famiglie che lo costituiscono ha per traiettorie un sistema di circoli.

(2) È ivi considerato un sistema triplo formato da superficie rigate.

(3) Questi sistemi tripli constano di superficie a curvatura costante ed eguale a ± 1.

117, 1893) (1); Puchta, *Aufstellung eines neuen dreifach orthogonalen Flächensystems* (Wiener Ber., 102, 1893);

16. Se si volge uno sguardo retrospettivo al Cap. che ora volge al termine, si constaterà senza stento come la Geometria differenziale sia stato uno dei rami della geometria coltivati nel nostro secolo più intensamente e col maggiore successo, forse perchè esso è capace di mettere in evidenza tanto le facoltà proprie al geometra quanto le attitudini speciali dell'analista, forse per le applicazioni che i problemi da esso risolti trovano nella geodesia e nella fisica. Il grado di perfezione che ai dì nostri raggiunse la geometria differenziale persuase parecchi geometri a redigerne delle esposizioni metodiche, e noi finendo ne indicheremo le migliori, dopò di avere avvertito che chi desidera vederla studiata sinteticamente ne troverà alcuni capitoli nel *Traité de calcul différentiel et intégral* (1, Paris, 1864) del Bertrand, nel già citato *Traité de géométrie descriptive* del de la Gournerie, nella dissertazione del Picart *Essai d'une théorie géométrique des surfaces* (Paris, 1863) e nelle memorie del Mannheim, alcune delle quali furono ricordate nelle pagine precedenti, e che per la maggior parte sono riprodotte o compendiate nell'opera intitolata *Principes et développements de géométrie cinématique* (Paris, 1894). Le trattazioni algebriche della teoria sono invece: Brisse, *Exposition analytique de la théorie des surfaces* (Ann. Éc. norm., II, 3, 1874, e Journ. Éc. pol., 53e cah., 1883); Hoppe, *Principien der Flächentheorie* (Arch. der Math., 59, 1876; 60, 1877; 68, 1882) (2); Joachimsthal, *Anwendung des Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung* (2e Aufl., Leipzig, 1881); Knoblauch, *Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen* (Leipzig, 1888); Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques*

---

(1) Nella seduta del 14 dicembre 1894 l'Accademia del Belgio ha premiata una memoria del Lévy rispondente al tema seguente proposto dall'Accademia medesima: " Riassumere e poi completare in qualche punto importante le ricerche dei geometri contemporanei, relative alla teoria dei sistemi tripli ortogonali ".

(2) Una seconda edizione uscì nel 1889. Cfr. anche gli articoli dello stesso autore: *Beispiel der Bestimmung einer Fläche aus der Indication der Normale* (Arch. der Math., 59, 1876), e *Geometrische Deutung der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung der Flächenteorie* (Id., 60).

du calcul infinitésimal (1); Résal, *Exposition de la théorie des surfaces* (Paris, 1891); A. Ribaucour, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes* (Journ. de Math., IV, 7, 1891); H. Stahl e V. Kommerell, *Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie* (Leipzig, 1893) (2); L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale* (Pisa, 1894) (3).

---

(1) Di quest'opera magistrale, che fa epoca nella storia della Geometria differenziale, furono pubblicate sino ad ora tre parti complete e la prima metà della quarta; esse hanno ordinatamente i temi seguenti: I. *Généralités. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima* (Paris, 1887). II. *Les congruences et les équations linéaires aux derivées partielles. Des lignes tracées sur les surfaces* (Paris, 1889). III. *Lignes géodésiques et courbure géodésique. Paramètres différentiels. Déformation des surfaces* (Paris, 1894). IV. *Déformation infiniment petite et représentation sphérique.*

(2) È questo un opuscolo eccellente come scritto di consultazione.

(3) Una prima edizione (litografata) ne fu pubblicata nel 1886; la seconda se ne distingue per l'uso metodico della teoria delle forme differenziali; la consigliamo e raccomandiamo a chiunque voglia intraprendere lo studio della Geometria differenziale.

CAPITOLO VI.

Ricerche intorno alla forma delle curve, delle superficie e di altre figure geometriche. Analysis situs. Configurazioni.

1. L'investigare qual forma abbia in generale o sia suscettibile di assumere in certi casi una figura definita mediante determinate leggi fu ritenuto sin dall'antichità più remota siccome uno dei problemi di pertinenza diretta del geometra, anzi come uno dei problemi che questi deve sforzarsi di sciogliere per ogni nuova figura sottoposta al suo studio, perchè la soluzione di esso, porgendo un concetto più chiaro di tale figura, spiana la via al risolvimento di altre nuove questioni.

Benchè ai primi matematici sia mancato il concetto di figura generale in una certa categoria, pure ad essi non isfuggì la possibilità di distribuire le linee piane o le superficie in due grandi classi, cioè in " chiuse " ed " aperte " (estendentisi all' infinito); tale osservazione rimase isolata per lunghissimo tempo, cioè fino al giorno in cui Staudt introdusse la nozione di rami di curve o falde di superficie " pari " e " dispari " (1). Fra l'una e l'altra di queste due osservazioni cade l'èra occupata dalle origini e dall'evoluzione della geometria analitica e del calcolo infinitesimale; in questo periodo furono proposti dei procedimenti sia per determinare la forma di un luogo geometrico rappresentato da una speciale equazione, sia per riconoscere il modo in cui esso comportasi nelle vicinanze di un suo punto, si avvertiron forse le gravi difficoltà che si oppongono alla determinazione delle forme sotto cui si può presentare una curva od una superficie d'ordine assegnato, ma non si ebbe la forza di sormontarle.

(1) Questa distinzione assieme ad altre osservazioni che vi si connettono si legge nei §§ 12-15 della *Geometrie der Lage*.

D'altronde, siccome per applicare l'analisi matematica alla ricerca delle proprietà delle figure geometriche non è necessario di sapersele raffigurare, così si ritenne legittimo il rimettere a miglior tempo la determinazione della loro forma; e che ciò fosse ragionevole è dimostrato da quanto narrammo nei quattro Cap. prec., nei quali sono descritte innumerevoli ricerche compiute intorno ad enti geometrici il cui aspetto in molti casi era completamente ignoto. Ma non tardò a giungere l'istante in cui si credette doveroso e possibile determinare anche l'apparenza esteriore delle figure studiate; delle investigazioni più importanti istituite in conseguenza intendiamo trattare in questo Cap., il quale rappresenta un complemento indispensabile di quelli che lo precedono.

Prima di entrare in materia osserviamo come dei risultati più cospicui che diede lo studio della forma delle curve e delle superficie si può agevolmente formarsi un concetto esaminando le collezioni esistenti di modelli di geometria, di cui la più copiosa e pregevole è quella della Casa L. Brill di Darmstadt (1), oppure percorrendo il Catalogo dell' Esposizione di modelli di matematica promossa, diretta ed effettuata negli anni 1892 e 1893 dalla Deutsche Mathematiker-Vereinigung (2).

2. Benchè gli studî generali sulla forma delle curve piane algebriche appartengano alla seconda metà del secolo attuale, pure la letteratura delle epoche precedenti non è priva di lavori riflettenti le forme di curve di ordini determinati. Per convincersene basti ricordare l'*Enumeratio linearum tertii ordinis* (1704) (3), colla quale il Newton, mostrando la possibilità di dedurre per proiezione la forma di tutte le cubiche piane da cinque tipi, mostrò su un esempio in qual modo fosse da concepirsi il problema di determinare le forme possibili di un dato ente geometrico, mostrò col fatto di avere almeno intuito l'importanza del concetto fondamentale della geometria proiettiva. Utiliz-

(1) Cfr. A. Brill, *Ueber die Modellsammlung des mathematischen Seminars der Universität Tübingen* (Böklen Mitth., 2, 1888).
(2) *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente* (München, 1892); *Nachtrag*, (München, 1893). Citeremo questi volumi in seguito per brevità come Katalog I e Katalog II.
(3) Cfr. W. W. Rouse Ball, *On Newton's Classification of Cubic Curves* (Proc. L. M. S., 22, 1891).

zando un'osservazione fatta da G. Bellavitis (1803-1880) nel suo lavoro *Sulla classificazione delle curve di terzo ordine* (Mem. Soc. XL, 25, II Parte, 1851, p. 34) si può enunciare il teorema di Newton dicendo: " con un'opportuna trasformazione proiettiva qualunque curva di terzo ordine può ridursi ad una delle forme seguenti: 1° Curva composta di un serpentino e di un ovale (parabola campaniformis cum ovali), 2° Curva costituita da un serpentino (parabola pura), 3° Curva con punto doppio (parabola nodata), 4° Curva con una cuspide (parabola cuspidata), 5° Curva con un punto isolato (parabola punctata) " (1). La verità di questa importante proposizione, assieme a quella di altre dalle quali emerge una ulteriore suddivisione delle cubiche piane in ordini, e che Newton aveva soltanto enunciate, venne provata da molti geometri in modi differenti. Fra le dimostrazioni di essa, oltre quelle che si leggono negli scritti di Stirling e Nicole da noi citati nel n. 1 del Cap. II, vanno ricordate quelle ad esse contemporanee del Clairaut (*Sur les courbes que l'on forme en coupant une surface courbe quelconque par un plan donné de position,* Mém. de Paris pour l'année 1731, Paris, 1733) e del Murdoch (1715-1774) (*Neutoni Genesis curvarum per umbras,* 1ª ed. Leida, 1740, 2ª ed., London, 1746).

Un concetto totalmente diverso da quello che informa la classificazione di Newton, sta a base di quella che propose Chasles, il quale, inspirandosi indubbiamente all'*Enumeratio* dell'emulo di Leibniz, mostrò (*Aperçu historique,* note 20) come tutte le cubiche piane si possano dedurre per proiezione da cinque di esse dotate di centro. Lo stesso tema fu trattato in tempi a noi vicini da Plücker nel suo *System der analytischen Geometrie* (Bonn, 1835 (2)), dal Bellavitis nella memoria precitata, dal Möbius — il quale si servì dei principî della sferica analitica di cui egli è il creatore (3) — nel celebre scritto *Ueber die Grund-*

(1) Cfr. Katalog I, 255, e II, 57.

(2) " ... es scheint dass das von Plücker gewählte Eintheilungsprincip kein glückliches war, insofern dabei die Zahl der zu unterscheidenden Gestalten sehr gross wird (219) und sich dieselben nicht übersichtlich gruppiren " (Clebsch, *Zum Gedächtniss an J. Plücker,* p. 22 dell'estratto).

(3) Notiamo che le classificazioni proposte da Bellavitis e Möbius contemporaneamente (perchè quella del primo, scritta nel 1851, apparve nel 1855, mentre l'altra venne pubblicata nel 1852) hanno questo di comune, che la projettività è posta a base della divisione in ispecie, e l'affinità della divisione in generi.

formen der Linien der dritten Ordnung (Leipziger Abh., 1, 1852) e dal Cayley nei seguenti lavori: *Note on Cones of the Third Order* (Phil. Mag., 18, 1859), *On the Inflexions of the Cubical Divergent Parabolas* (Quart. Journ., 6, 1864), *On the Classification of Cubic Curves* (Cambridge Trans., 11, I Parte, 1866), *On Cubic Cones and Curves* (Ivi), e *On the Cubical Divergent Parabolas* (Quart. Journ., 9, 1868). Al Cremona (*Considerazioni sulle curve piane del terz'ordine*, Giorn. di Mat., 2, 1864) si deve la scoperta del legame che passa fra la forma di una cubica ed il segno del rapporto anarmonico costante delle quattro sue tangenti che escono da un punto arbitrario di essa; da ciò si può far derivare una classificazione delle curve di 3° ordine che fu svolta dal Durège in due memorie *Ueber die Formen der Curven dritter Ordnung* (Journ. f. Math., 75 e 76, 1873). Una nuova discussione delle forme delle cubiche ed una conseguente nomenclatura differente dalla newtoniana vennero suggerite da F. W. Newman (*On Curves of the Third Order or Tertians,* Brit. Ass., 1869-70); mentre dei procedimenti nuovi per stabilire i risultati già noti furono proposti dal Reye nella 3ª ed. della sua *Geometrie der Lage* (Leipzig, 1886-92) (1); dal Baur nel lavoro intitolato *Synthetische Einteilung der ebenen Kurven III Ordnung* (Stuttgart, 1888), dal Disteli nella memoria *Ueber eine neue einfache Darstellungsweise der Gestalten der ebenen Curven dritter Ordnung* (Zeitschr. f. Math., 36, 1891) e da F. Köhnel in quella intitolata *Ableitung der verschiedenen Formen der Kurven dritter Ordnung durch Projection und Klassification derselben* (I Th., Ettenheim, 1894). Della determinazione della realtà di certi punti di una cubica si occupò A. S. Hart (*On Ninepoints Contact of Cubic Curves,* Dublin Trans., 1875) e più diffusamente E. Kötter (*Beiträge zur Theorie der Oskulation bei ebenen Kurven dritter Ordnung* (Diss. Berlin, 1884).

La legge di dualità ci consiglia a far cenno qui delle indagini intorno alla classificazione delle curve piane di terza classe intraprese quasi mezzo secolo fa dal Bellavitis (*Sulla classificazione delle curve della terza classe,* Atti Ist. Ven., III, 4, 1852) e recentemente continuate da W. Burnside (*On the Form of Closed Curves of the Third Class,* Mess., II, 21, 1891).

(1) Ivi la cubica è considerata come Jacobiana di una rete di coniche.

3. L'esempio dato da Newton venne seguito da geometri i quali, volendo emularlo, si proposero di classificare le curve di ordine superiore al terzo; fra essi sono da nominare il Bragelogne (1688-1744) pei lavori *Examen des lignes du quatrième ordre* (Mém. de Paris, 1730) e *Sur les lignes du quatrième ordre* (Id., 1732), Eulero e Cramer pei trattati tante volte citati e il Plücker per alcune pagine (249 e segg.) della *Theorie der algebraischen Kurven* (1).

Ma tali ricerche — e così quelle di Cayley *On Quartics Curves* (Phil. Mag., 29, 1865) — non possono considerarsi che come precursori estremamente remoti delle indagini moderne, le quali da un lato vennero inaugurate dallo Zeuthen colla memoria *Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre* (Math. Ann., 7, 1874) (2) e proseguite poi dal Crone colla nota *Sur la distribution des tangentes doubles sur les divers systèmes de coniques ayant un contact quadruple avec une courbe du quatrième ordre* (Id., 12, 1877) (3), e da un altro lato furono compiute dal Klein colle memorie *Ueber den Verlauf der Abel'schen Integralen bei der Curven vierten Grades* (Id., 10, 1876 e 11, 1877).

Ad esse si possono riavvicinare le ricerche analoghe sulle quartiche ellittiche o razionali (cfr. Katalog, I, 255-56, e II, 57). Delle ellittiche si occuparono il Fiedler (nella 3ª ed. della sua *Darstellende Geometrie*) e il Cardinaal (*Applications des principes de la géométrie synthétique à la solution des problèmes de la géométrie descriptive*, Ann. de l'Éc. pol. de Delft., 3, 1887) e *Zur Theorie der ebenen Curven vierter Ordnung* (Journ. f. Math., 102, 1888) i quali le considerarono, vuoi come proiezioni di quartiche gobbe di prima specie, vuoi come prodotti di fasci proiettivi di coniche. Delle razionali trattò Franz Meyer nella Diss. intitolata *Anwendung der Topologie auf die Gestalten der algebraischen Kurven, speziell der rationalen Kurven vierter und fünfter Ordnung* (München, 1878) e nella posteriore nota *Ueber algebraische*

---

(1) Cfr. Beers, *Tabulae curvarum quarti ordinis symmetricarum* (Bonn, 1862).

(2) Cfr. Hossfeld, *Ueber die Realitätsverhältnisse der Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung* (Zeitschr. f. Math., 31, 1886).

(3) La dissertazione di C. Piper *Ueber die Formen der Curven vom vierten Grade welche keinen Doppelpunkt haben* (Rostock 1876) ha dei casuali punti di contatto col lavoro dello Zeuthen.

Knoten (Proc. of the R. Soc. of Edinburgh, 13, 1887), in cui sono applicate o svolte alcune idee che il Tait fece conoscere nella sua memoria *On Knots* (Trans. of the R. Soc. of Edinb., 28, 1877 e 32, 1885; cfr.: anche Brunn, *Ueber Verkettung,* Münchener Ber., 22, 1892).

4. Ricorderemo di passaggio le osservazioni del Crone *Sur une espèce de courbes symétriques de la sixième classe* (Acta, 2, 1883) per volgerci ad enumerare le nozioni che possediamo intorno alla forma delle curve d' ordine qualsivoglia. Oltre ad alcuni *General Theorems relating to Close Curves* (Brit. Ass., 1876) del Tait e dello stesso *Some Elementary Properties of Closed Plane Curves* (Mess., II, 6, 1877), oltre l'Habilitationsschrift del Brunn *Ueber Curven ohne Wendepunkte* (München, 1889) citeremo con grande onore *Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve* (Math. Ann., 10, 1876) alla quale Klein fu condotto studiando le classificazioni delle quartiche suggerite da Plücker e Zeuthen (1), e il teorema di Harnack (2) " una curva di genere p può constare al massimo di $p+1$ rami distinti e questo massimo è effettivamente raggiunto qualunque sia p " (3), teorema che stabilendo un legame fra la forma di una curva ed il suo genere nuovamente conferma l' importanza di questa caratteristica. Al primo di questi fondamentali lavori diede un complemento necessario il Brill (*Ueber Singularitäten ebener algebraischen Curven und eine neue Curvenspecies,* Math. Ann., 16, 1880) coll'assegnare le modificazioni che intervengono nella formola di Klein per la presenza di singolarità superiori; mentre dal secondo rampollano gli scritti di D. Hilbert *Ueber die reellen Züge algebraischer Curven* (Id., 38, 1887) e di L. S. Hulburt sopra *A Class of new Theorems on the Number and Arrangement of Real Branches of Plane Algebraic Curves* (Am. Journ., 14, 1892).

---

(1) Cfr. Perrin, *Sur une relation remarquable entre quelques-unes des singularités réelles des courbes algébriques planes* (Bull. S. M. F., 6, 1878).

(2) V. la memoria *Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven* (Math. Ann., 10, 1876).

(3) Il caso speciale corrispondente a $p = 0$ era già noto; Bellavitis ne fe' cenno nella memoria citata intorno alle cubiche; d'altronde esso giustifica la denominazione di *unicursali* che Cayley impose alle curve razionali.

Grande importanza possiede la connessione fra le ricerche sulla forma delle curve piane e quelle intorno alle superficie di Riemann simmetriche che F. Klein segnalò nell' opuscolo *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale* (Leipzig, 1882) e che svilupparono poi il Weichold nella Diss. *Ueber symmetrische Riemann'sche Flächen und die Periodicitätsmoduln der zugehörigen Abel'schen Normalintegrale erster Gattung* (Zeitschr. f. Math., 28, 1883) ed il Klein medesimo nel recente lavoro *Ueber Realitätsverhältnisse bei der einem beliebigen Geschlechte zugehörigen Normalcurve der φ* (Math. Ann. 42, 1893).

Ricorderemo finalmente l' estesa memoria dello Zeuthen intitolata *Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver, avec un résumé en français* (Mem. dell'Acc. di Kopenhagen, V, 10, 1873) — a cui auguriamo una traduzione in qualche idioma più conosciuto del danese la quale agevoli la diffusione dei concetti e dei risultati originali ed importanti in essa esposti — e l'altra dello Kneser intitolata *Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Kurven* (Math. Ann., 41, 1893).

5. Il metodo adoperato in quest'ultimo lavoro è modellato su quello che lo stesso autore adoperò nelle due memorie *Synthetische Untersuchungen über die Schmiegungsebenen beliebiger Raumcurven und die Realitätsverhältnisse specieller Kegelschnittsysteme* (Math. Ann., 31, 1888) e *Allgemeine Sätze über die scheinbaren Singularitäten beliebiger Raumcurven* (Id., 34, 1889), le prime che tocchino il tema interessante e difficile di determinare le proprietà di forma delle curve sghembe. Per l'argomento, se non pel metodo, si collegano ad esse le indagini di Fr. Meyer, *Ueber Realitätseigenschaften von Raumcurven* (Götting. Nachr., 1891) e *Ueber Discriminanten und Resultanten der Gleichung für Singularitäten von algebraischen Raumcurven, mit Anwendung auf Realitätsverhältnisse* (Math. Ann., 43, 1893, e Monatshefte, 4, 1893), colla quale resta esaurita l'enumerazione dei lavori concernenti le anzidette questioni (1). Sperando che l'avvenire ne renda l' elenco

---

(1) Alcune notizie isolate si leggono nella nota di C. Wiener, *Die Abhängigkeit der Rückkehrelemente einer unebene Curve von der Curve selbst* (Zeitschr. f. Math., 25, 1880; cfr. Katalog I, 298) e nello scritto del Björling intitolato

più numeroso, osserveremo come la determinazione della forma di molte speciali curve a doppia curvatura sia stata già fatta: lo fu per le cubiche gobbe (Katalog, I, 268, e II, 58), lo fu per le quartiche gobbe di 1ª specie (Id., I, 269, II, 61) e di 2ª (Fr. Meyer, *Ueber Realitätsverhältnisse auf Raumcurven 4er Ordn. zweiter Species,* Böklen Mitt., 4, 1891; Rohn, *Modelle der rationalen Raumcurven 4. Ordn. und ihrer Developpabeln,* Deutsch. Math.-Ver., 1, 1892; Katalog, I, 269, 270 e 272), mentre d'altronde possediamo da tempo una bella memoria del Möbius *Ueber die Gestalt sphärischer Curven welche keine merkwürdigen Puncte haben* (Leipziger Ber., 2, 1848) ed alcune osservazioni del Cayley *On Contour and Slope Lines* (Phil. Mag., 18, 1859).

6. Passando ora alle varietà a due dimensioni, additeremo al lettore anzitutto lo studio dell'aspetto delle superficie nelle vicinanze di certi punti singolari (Katalog, I, 299-302) e poi le ricerche sulla connessione (1), quelle di C. Jordan *Sur la déformation des surfaces* e *Des contours tracés sur les surfaces* (Journ. de Math., II, 11, 1866), e quelle generali relative non soltanto alle superficie ma anche alle curve piane, i cui risultati il Korteweg fece conoscere col mezzo della estesa memoria *Ueber Singularitäten verschiedener Ausnahme-Ordnung und ihre Zerlegung* (Math. Ann., 41, 1893). — Delle superficie chiuse in particolare si occuparono il Reech, il quale, nella nota intitolata *Démonstration d'une propriété générale des surfaces fermées* (Journ. Éc. pol., 37e cah., 1858), considerò il numero delle normali reali che si possono condurre da un punto ad una delle anzidette superficie, e H. Brunn nella Diss. *Ueber Ovale und Eiflächen* (München, 1887) (2).

Modelle von Raumcurven und Developpablen-Singularitäten (Lund, 1881). Aggiungiamo che alla forma di una classe particolare di curve gobbe si riferisce la nota del Brill *Ueber algebraische Raumcurven, welche die Gestalt einer Schlinge haben* (Math. Ann., 18, 1881); mentre alla condizione affinchè due curve s'intreccino è dedicata la nota del Thomae *Ueber ein Integral von Gauss welches die Verknottung zweier geschlossenen Kurven im Raume zählt* (Berichte der nat. Ges. in Freiburg i. Br., 7, 1876) ed ai punti doppî apparenti la nota del Brunn *Ueber scheinbare Doppelpunkte von Raumcurven* (Deutsch. Math.-Ver., 3, 1894).

(1) V. fra altri gli scritti di Klein, *Ueber den Zusammenhang der Flächen* (Math. Ann., 7, 1874, e 9, 1876).

(2) Cfr. anche gli articoli dello stesso autore: *Ein Satz über Eiflächen* e

Volgendoci ora alle superficie di ordine determinato, richiameremo l'attenzione del lettore sul bel gruppo di modelli del Brill concernenti le quàdriche (Katalog I, 257-263) e sulle seguenti memorie intorno alla forma delle superficie cubiche (1): Klein, *Ueber Flächen dritter Ordnung* (Math. Ann., 6, 1873); Schläfli, *Quand'è che dalla superficie generale di terz'ordine si stacca una parte che non sia realmente segata da ogni piano reale?* (Ann. di Mat., II, 5, 1873), e *Correzione* (Id., 7, 1876); Zeuthen, *Étude des propriétés de situation des surfaces cubiques* (Math. Ann., 8, 1875); G. Bauer, *Von den gestaltlichen Verhältnissen der parabolischen Curve auf einer Fläche dritter Ordnung* (Münchener Ber., 13, 1883); Herting, *Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der Flächen dritter Ordnung und ihrer parabolischen Kurven* (Diss., München, 1887).

Oltre alle rigate di quarto grado (Rohn, *Die verschiedenen Arten der Regelflächen vierter Ordnung,* Math. Ann., 28, 1887; Katalog I, 275-6 e II, 62), le superficie di quarto ordine che furono già studiate dal punto di vista della forma sono: la ciclide (si vegga la memoria di Clerk Maxwell (1831-1879) *On the Cylide,* Quart. Journ., 9, 1868, e Katalog I, 265), la superficie di Kummer (v. le memorie del Rohn citate nel n. 11 del Cap. III e Katalog I, 265), la superficie delle onde (W. M. Hicks, *Practical Method of Modelling the Wave Surface,* Mess., II, 5, 1876), quella di Steiner (Katalog I, 266), quelle a conica doppia (Zeuthen, *Om Flader af fjerde Orden med Doppeltkeglesnit,* Kopenhagen, 1879), e Cardinaal, *Constructie der oppervlakken van den vierden graad met dubbelkeglesnede door middel van projectivische bundels oppervlakken van den tweeden graad,* Amsterdam Versl., III, 8, 1891), quelle a conica cuspidale (Crone, *Om Flader af fjerde Orden med Tilbagegangskeglesnit,* Kopenhagen, 1881), ed altre ancora di minore importanza (Katalog, I, 265 e 267).

Tacendo per brevità di alcune speciali superficie d'ordine superiore al quarto (Ivi, p. 267-9 e 282-3) e di alcune sviluppabili particolari (Ivi, p. 272 e 2, p. 25), ricorderemo ancora i modelli

---

Referat über eine Arbeit " Exacte Grundlagen für eine Theorie der Ovale ", Münchener Ber., 24, 1894).

(1) Per le superficie cubiche non rigate v. Katalog I, 263 e 283; II, 57 e 70; e per le rigate Id., I, 275 e II, 60. Cfr. anche l'articolo del Korteweg *Sur les modèles des surfaces cubiques construites d'après les indications de M. Rodenberg* (Nieuw Archiv voor Wiskunde, 20, 1893).

delle superficie di curvatura, totale (1) o media, costante (Ivi, p. 291-297), e quelli intesi a illustrare la teoria della curvatura di alcune superficie (Ivi, 1, p. 285-291, 302-4 e 2, p. 71), o le proprietà delle asintotiche di una superficie generale (cfr. Dyck, *Gestaltliches über den Verlauf der Haupttangentencurven einer algebraischen Fläche,* Deutsch. Math.-Ver., 1, 1892).

Notiamo da ultimo che le indagini intorno alla forma delle curve e le superficie algebriche si possono intendere come casi speciali di quelle che il Segre inaugurò colle già citate scritture (v. pag. 35, nota 1) intorno ad *Un nuovo campo di ricerche geometriche* e poi svolse nell'importantissima memoria sopra *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici* (Math. Ann., 40, 1892). Infatti nei lavori che citammo nei Cap. II, III e IV, delle curve e delle superficie si consideravano tutti i punti reali ed immaginarii; studiare la forma di una curva o di una superficie equivale a considerarne i soli punti reali; ora, invece di studiare gli ∞^1 punti reali di una curva o gli ∞^2 punti reali di una superficie, si possono studiare le serie costituite da ∞^1 punti complessi scelti fra gli ∞^2 punti complessi di una curva, oppure le serie di ∞^1 o ∞^2 o ∞^3 di punti complessi contenute nella totalità degli ∞^4 punti complessi di una superficie. Gli è appunto quanto ha suggerito il Segre; il quale avvertì per primo la necessità di considerare dei nuovi punti che fossero rispetto ai punti complessi ciò che questi sono rispetto ai reali; dopo questi *punti bicomplessi,* si dovranno considerare i *tricomplessi,* ecc.

7. Gli scritti di Möbius di cui parlammo nelle pagine precedenti non sono gli unici del grande geometra che tocchino le questioni intorno alla forma delle superficie; bisogna ancora citare la grande *Theorie der elementaren Verwandschaften* (Leipziger Ber., 15, 1863) in cui sono esposte delle notevoli considerazioni che oggi si ritengono come appartenenti all'*Analysis situs* (2), importante ramo di geometria di cui vennero gettati i semi da Riemann nella *Theorie der Abel'schen Functionen* (Journ. f. Math., 54,

---

(1) Un modello di superficie pseudosferica venne costruito dal Beltrami fin dal 1868; esso passò per le mani del Cremona e del Casorati; ma è ignoto qual fine abbia fatto.

(2) Cfr. Katalog I, 278 e II, 64, 69, 71-73.

1857; v. anche *Fragment aus der Analysis situs,* in *Ges. Werke,* Leipzig, 1876, p. 448), e che venne poi coltivato da molti geometri i cui lavori si trovano accuratamente caratterizzati nell'introduzione dell'importante memoria di W. Dyck *Beiträge zur Analysis situs* (Math. Ann., 32, 1888, e 37, 1890 (1)), alla quale rimandiamo il lettore desideroso di maggiori particolari.

Vogliamo qui citare una seconda volta (cfr. Cap. II, n. 10) la *Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi* del de Paolis, giacchè ivi, non solo sono esposte e completate le più significanti indagini anteriori sull'*Analysis situs,* ma è introdotta come ausiliare del geometra e studiata in modo originale, la celebre superficie a più strati di cui Riemann arricchì la collezione degli strumenti proprî all'analista. Prima del de Paolis le " superficie di Riemann » erano state studiate con buon successo dal Lüroth (*Note über Verzweigungschnitte und Querschnitte in einer Riemann'schen Fläche,* Math. Ann., 4, 1871), dal Clebsch (*Zur Theorie der Riemann'schen Flächen,* Id., 6, 1873), dal Clifford (*On the Canonical Form and Dissections of a Riemann's Surface,* Proc. L. M. S., 8, 1877), da J. H. Graf (*Beiträge zur Theorie der Riemann'schen Fläche,* Diss. Bern, 1880), e dal Bertini (*Sulle superficie di Riemann,* Lincei Rend., V, 2, 1893_2) (2); d'altronde il concetto di superficie di Riemann venne radicalmente trasformato da F. Klein nelle importanti scritture *Ueber eine neue Art Riemann'scher Flächen* (Math. Ann., 7, 1874, e 10, 1876) (3).

Nell'anzidetta memoria del de Paolis è tenuto il debito conto anche delle idee originali che il Möbius espose ed applicò nella sua celebre nota *Ueber die Bestimmung des Inhalts einer Polyeder* (Leipziger Ber., 17, 1867) (4); il che porge a noi il destro di far

(1) Fra i lavori posteriori ricorderemo i seguenti: E. Bortolotti, *Alcune osservazioni sulla definizione di connessione* (Bologna Rend., 1890, in continuazione della nota dello stesso autore, *Sopra un teorema della teoria della connessione* Lincei Rend., IV, 5, 1889_1); C. Koehler, *Beweis eines Satzes aus der Analysis situs* (Journ. f. Math., 109, 1892); H. Poincarré, *Analysis situs* (Journ. Éc. pol., II, 1er cah., 1894).

(2) Cfr. F. Hofmann, *Methodik der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen* (Halle a. S., 1889).

(3) Cfr. del Pezzo, *Sulle superficie di Riemann relative alle curve algebriche* (Palermo Rend., 6, 1892).

(4) Ivi s'incontra la " superficie unilaterale ". Cfr. anche la nota postuma

cenno delle ricerche moderne sulla teoria dei poliedri (1) che, oltre il Listing *(Census räumlicher Gebilde,* Götting. Abh., 10, 1861; v. anche Götting. Nachr., 1867), fecero il Kirkman *(On the Representation and Enumeration of Polyhedra,* Mem. of Lit. and Phil. Soc. of Manchester, 12, 1854; *On the Enumeration of* x*-edra having Triedral Summits and an* (x-1)*-gonal Base,* Phil. Trans., 146, 1856; *On Autopolar Polyhedra,* Phil. Trans., 147, 1857), il Cayley (*The Problem of Polyhedra,* Ivi; *On the Δ-faced Polyacrons in Reference to the Problem of the Enumeration of Polyhedra,* Mem. of Lit. and Phil. Soc. of Manchester, 1, 1862; *On the Partition of a Close,* Phil. Mag., 21, 1861); il Jordan *(Recherches sur les polyèdres,* Journ. f. Math., 66, 1866, e 68, 1868; *Résumé de recherches sur la symétrie des polyèdres non eulériens,* Id., 66, 1866; *Note sur la symétrie inverse des polyèdres non eulériens,* Id., 68, 1868; *Sur les assemblages de lignes,* Id., 70, 1869) (2), il Bertini *(Sui poliedri euleriani,* Pisa Ann., 1868-69), il Clifford *(On a Theorem Relating to Polyhedra analogous to Mr. Cotterill's Theorem on Plane Polygones,* Proc. L. M. S., 4, 1872), l'Hess *(Einleitung in die Lehre der Kugeltheilung mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung auf die Theorie der gleichflächigen und gleicheckigen Polyeder,* Leipzig, 1883), il Feil *(Ueber Euler'sche Polyeder,* Wiener Ber., 93, 1886), l'Eberhard *(Eine Klassification der allgemeinen Ebenensysteme,* Journ. f. Math., 106, 1890, e *Zur Morphologie der Polyeder,* Leipzig, 1891), ed il Cesàro *(Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polyèdre soit superposable à son image dans un miroir plan,* Belgique Bull., III, 12, 1891).

Un indiscutibile legame con le indagini precedentemente discorse hanno quelle che si sogliono comprendere sotto il nome di " topologia " — nome che incontrasi, a quanto sappiamo, per la prima volta nelle *Vorstudien zur Topologie* (Göttinger Studien, 1847) del Listing (3) —; esse vennero svolte in questi ultimi anni

---

Zur Theorie der Polyeder und der Elementarverwandschaften in *Möbius Werke,* 2 (Leipzig, 1886), p. 513-560, e C. Reinhardt, *Zu Möbius Polyedertheorie* (Leipziger Ber., 15, 1885), e *Einleitung in die Theorie der Polyeder* (Meissen, 1890).

(1) Abbiamo escluso quelle che hanno attinenza più stretta colla cristallografia che colla geometria.

(2) Cfr. de Polignac, *Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications* (Bull. S. M. F., 8, 1880 e 9, 1881).

(3) Cfr. Hierholzer, *Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren* (Math. Ann., 6, 1873), e Cayley, *On Listing's Theorem* (Mess., 2, 1873).

con ottimi risultati specialmente da O. Simony — del quale basti qui ricordare l'opuscolo intitolato *Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgabe: " In ein ringförmig geschlossenes Band, einen Knot zu machen „ und verwandter merkwürdiger Probleme* (3ᵉ Aufl., Wien, 1881) e le due memorie *Ueber eine Reihe neuer Thatsachen aus dem Gebiete der Topologie* (Math. Ann., 19, 1882 e 25, 1884) (1); lo seguirono L. Koller (*Ueber einige allgemeine auf Knotenverbindungen bezügliche Gesetze,* Wiener Ber., 89, 1884), il Dingeldey (*Topologische Studien über die aus ringförmig geschlossenen Bänder durch gewisse Schnitte erzeugbaren Gebilde* (Leipzig, 1890). Aggiungiamo ancora che ad uno speciale ma interessante teorema che dipende dall'aspetto di una superficie e comprende uno più antico relativo al piano (cfr. Tait, *On Colouring of Maps,* Proc. of the R. Soc. of Edinburg, 10, 1880) (2) si riferiscono gli scritti seguenti: Kempe, *On the Geographical Problem of the Four Colours* (Am. Journ., 2, 1879); Heawood, *Map-colours Theorem* (Quart. Journ., 24, 1890); Heffter, *Ueber das Problem der Nachbargebiete* (Math. Ann., 38, 1891).

8. Alle svariate ricerche di cui tentammo ritrarre i lineamenti nel presente Cap. ci conviene riavvicinare quelle intorno alle figure costituite da un certo numero di punti, rette e piani, cioè a quegli aggruppamenti notevoli che oggi si designano col nome di *configurazione* e coll'abbreviazione Cf. (3).

Le memorie di Cayley *Sur quelques théorèmes de la géométrie de position* (Journ. f. Math., 31, 1846, 34, 1847, e 41, 1851), le numerose scritture intorno all'esagrammo di Pascal (le quali

---

(1) Cfr. H. Brunn, *Topologische Betrachtungen* (Zeitschr. f. Math., 37, 1892).

(2) Questo teorema afferma la possibilità di colorire qualunque carta di geografia politica adoperando quattro soli colori.

(3) Una Cf. n_i piana consta di n punti ed n rette disposte in modo che ogni retta contenga i punti e per ogni punto passino i rette. Una Cf. (n_i, g_k) nello spazio consta di n punti, n piani e g rette tali che per ogni punto, passano i piani e k rette e su ogni piano stanno i punti e k rette. È *regolare* una Cf. che si comporti allo stesso modo rispetto ad ogni suo punto.
Avvertiamo che la teoria delle configurazioni presenta poche analogie con quelle trattate nelle parti precedenti dell'attuale Cap.; in essa non si fa veruna distinzione fra elementi reali ed elementi immaginarî, sicchè essa è in realtà un capitolo della geometria projettiva, mentre le ricerche sulla forma delle figure geometriche formano un ramo di geometria (per dirlo col Klein) il cui gruppo di trasformazioni non è quello della geometria di posizione.

sono ricordate nell'introduzione dell'importante lavoro del Veronese intitolata *Nuovi teoremi sull'exagrammum mysticum,* Lincei Mem., III, 1, 1877) e meglio ancora molte delle proposizioni enunciate da Steiner e concernenti quel ramo di matematica che Poncelet designava sprezzantemente col nome di " geometria di combinazione " (1) mostrano ad esuberanza che gli elementi di questa teoria risalgono ad epoca abbastanza lontana da noi.

Ciò è confermato dagli studî sopra i triangoli più volte omologici fatti dallo Schröter (*Ueber perpectivisch liegende Dreiecke,* Math. Ann., 2, 1870), dal Rosanes (*Ueber Dreiecke in perspectivischer Lage,* Ivi), e Hess (*Beiträge zur Theorie der mehrfach perspectiven Dreiecke und Tetraeder,* Id., 28, 1887) (2). Lo stesso dicasi per quelli intorno alla configurazione nascente da un esagono dieci volte di Brianchon, scoperta da Steiner (*Ges. Werke,* 2, p. 512) e da Clebsch (*Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen 5*^{en} *Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits,* Math. Ann., 4, 1871) e le cui proprietà vennero poi metodicamente studiate dallo Schröter (*Das Clebsch'sche Sechseck,* Id., 28, 1887).

Ma la teoria delle configurazioni cominciò ad avere vita autonoma nel 1882 per merito del Reye, il quale ne caratterizzò il còmpito nell'articolo intitolato *Das Problem der Configurationen* (Acta, 1) e ne illustrò i procedimenti colla successiva nota *Die Hexaëder und Octaëder-Configurationen* (12_6, 16_3) (Ivi). A partire da questo istante la teoria generale delle configurazioni piane venne studiata a fondo (segnatamente dal Martinetti, dal de Vries e dal Schönflies) e da varî punti di vista, nè si trascurò di accrescere il numero delle configurazioni speciali del piano e dello spazio, o il numero delle proprietà delle configurazioni già note. Tutto ciò emerge dal seguente elenco di memorie sull'argomento che ci occupa (3): Victor, *Die harmonische Configuration* 24_2 (Be-

---

(1) *Traité des propr. proj.* (2e éd., Paris, 1865-66, 2, p. 404); ivi si legge la frase " géométrie combinatoire de M. Steiner "; altrove (II, 1, p. 414) Poncelet parla di " théorèmes à combinaisons ".

(2) Come lo fa supporre il titolo, in questo scritto è anche trattata la questione analoga nello spazio; v. anche Klug, *Ueber mehrfach perspective Tetraeder* (Arch. der Math., II, 6, 1887).

(3) Fra esse non abbiamo poste le seguenti di S. Kantor, perchè cominciarono ad uscire prima dei lavori del Reye: *Ueber eine Gattung von Configurationen* (Wiener Ber., 80, 1879); *Ueber die Configuration* (3, 3) *mit den*

richte der nat. Ges. in Freiburg i. Br., 8, 1882); Hossfeld, *Ueber die mit der Lösung einer Steiner'schen Aufgabe zusammenhängende Configuration* (12_6, 16_8) (Zeitschr. f. Math., 29, 1884, e 30, 1885); Jung, *Sull'equilibrio dei poligoni articolati in connessione col problema delle configurazioni* (1) (Ann. di Mat., II, 12, 1884), e *Sopra una classe di configurazioni d'indice* 3 (Rend. Ist. Lomb., II, 18, 1885); Martinetti, *Sopra alcune configurazioni piane* (Ann. di Mat., II, 14, 1886), *Sulle configurazioni piane* μ_3 (Id., 15, 1887), *Sopra un gruppo di configurazioni regolari contenute nell'esagrammo di Pascal* (Atti dell'Acc. Gioenia, IV, 3, Catania, 1891); Schröter, *Ueber das Fünfflach und Sechsflach und die damit zusammenhängende Kummer'sche Configuration* (Journ. f. Math., 100, 1886), *Ueber lineare Constructionen zur Herstellung der Configurationen* x_3 (Götting. Nachr., 1888), *Ueber die Bildungsweise und geometrische Construction der Configuration* 10_3 (Id., 1889), *Die Hesse'sche Configuration* (12_4, 16_3) (Journ. f. Math., 108, 1891) (2), e *Elementare Construction der Figur der in desmischen Lage befindlichen Tetraeder* (Id., 109, 1892) (3); F. Klein, *Ueber Configurationen, welche den Kummer'schen Flächen zugleich ein- und umgeschrieben sind* (Math. Ann., 27, 1886); Staigmüller, *Die harmonische Configuration* (Diss. Tübingen, 1886); Schönflies, *Ueber einige ebene Configurationen und die zugehörigen Gruppen von Substitutionen* (Götting. Nachr., 1887), *Ueber die regelmässige Configurationen* x_3 (Math. Ann., 31, 1888), *Ueber Configurationen welch sich aus gegebenen Raumelementen durch blosses Schneiden und Verbinden ableiten lassen* (Deutsch. Math.-Ver., 1, 1890-91), *Bemerkungen zur Theorie der regelmässigen Configurationen* x_3 (Math. Ann., 42, 1893); Caporali, *Memorie di geometria* (Napoli, 1888);

8, 9 *Indices und ihren Zusammenhang mit den Curven dritter Ordnung* (Id., 84, 1881), *Die Configurationen* $(3, 3)_{10}$ (Ivi), e *Ueber eine Configuration* $(3, 3)_{10}$ *und unicursale Curven vierter Ordnung* (Math. Ann., 21, 1883). Altrettanto facemmo per quella del Veronese, *Sopra alcune configurazioni di punti, rette e piani, di coniche e superficie di 2° grado e di altre curve e superficie* (Lincei Mem., III, 9, 1881).

(1) Si veda anche: Burmester, *Kinematische Untersuchungen der Mechanismen mit Bandtrieb* (Der Civilingenieur, II, 35, 1889) e *Ueber die momentane Bewegung der ebenen Mechanismen* (Technische Blätter, 22, 1890).

(2) Cfr. E. Hess, *Bemerkung zu der Abhandlung von H. Schröter* (Journ. f. Math., 111, 1893).

(3) Cfr.: Stephanos, *Sur les systèmes desmiques de trois tétraèdres* (Bull. Sc. math., II, 3, 1879).

De Vries, *Ueber gewisse ebene Configurationen* (Acta, 12, 1888), *Ueber die einem Vierseite harmonisch eingeschriebene Configuration* 18_3 (Wiener Ber., 92, 1888), *Over vlakke Configuraties* (Amsterdam Versl., III, 5, 1888), *Over de harmonische Configuratie* (24_3, 18_4) (Ivi), *Over vlakke polyedrale configuraties* (Id., 6, 1889), *Over eene groep van regelmatige vlakke configuraties* (Ivi), *Over de desmische Configuratie* 9_3 (Ivi), *Over vlakke configuraties, die nit de osculatiegroepen der kubische kromme kunnen worden afgeleid* (Ivi), *Over vlakke configuraties, waarin elk punt met twee lijnen incident is* (Ivi), *Ueber gewisse der allgemeinen cubischen Curve eingeschriebene Configurationen* (Wiener Ber., 98, 1889), *Ueber gewisse Configurationen auf ebenen kubischen Curven* (Ivi), *Ueber polyedrale Configurationen* (Math. Ann., 34, 1889), *Ueber eine Gattung regelmässiger ebener Configurationen* (Id., 35, 1889), *Ueber die Configuration welche durch die Aehnlichkeitspunkte und Aenlichkeitsgeraden von* n *Kreisen der Ebene gebildet werden* (Zeitschr. f. Math., 35, 1890), *Over eene groep van regelmatige vlakke configuraties en eenige daarmede samenhangende vlakke configuraties van punten en krommen* (Amsterdam Versl., III, 7, 1890), *Nieuwe eigenschappen der harmonische configuratie* (24_3, 18_4) (Ivi), *Cyclische veelhoeken on vlakke kubische krommen* (Ivi), *Sur les configurations planes dont chaque point supporte deux droites* (Palermo Rend., 5, 1891), *Ueber räumliche Configurationen, welche sich aus den regelmässigen Polyedern herleiten lassen* (Wiener Ber., 100, 1891), *Ueber gewisse räumliche Configurationen* (K. Akad. van Wetenschappen, Verslagen, Amsterdam, 1894-5) (1); Witting, *Ueber eine der Hesse'schen Configuration der ebenen Curven 3. Ordnung analoge Configuration im Raume* (Diss. Göttingen, 1887); Maschke, *Ueber eine merkwürdige Configuration gerader Linien im Raume* (Götting. Nachr., 1889, e Math. Ann., 36, 1890); Hess, *Beiträge zur Theorie der räumlichen Configurationen. Ueber die Klein'sche Configuration* (60_{15}, 30_6) *und einige bemerkenswerte räumliche Configurationen* (Verhand. der K. Leop.-Carol. Deutschen Akad. der Wiss., 55, Halle, 1890), *Ueber gewisse räum-*

(1) Questo si collega a un lavoro dell'Andreeff *Sul problema delle configurazioni* pubblicato in russo dalla Società matematica di Kharkow. Alla teoria delle configurazioni si riattaccano anche le due memorie del de Vries, *Isodynamische und metaharmonische Gebilde* (Wiener Ber., 101, 1892) e *Involutions harmoniques dans le plan et sur la sphère* (Archives Teyler, II, 4, 1894).

liche Configurationen (Berichte der nat. Ges. in Marburg i. Br., 1892); Daublebsky, *Die Configurationen* 11_3 (Monatshefte, 5, 1894); Sterneck, *Die Configuration* 11_3 (Monatshefte, 5, 1894), e *Die Configuration* 12_3 (Id., 6, 1895); E. Hastings Moore, *A Configuration of 36 Points, 27 Lines, 36 Planes, a Special Case of which leads to Klein's Hyperelliptic Configuration of 40 Points, 90 Lines, 40 Planes* (American Association, Proc., 1894).

CAPITOLO VII.

Geometria della retta nello spazio.

1. Nella geometria greca si considera il punto come l'elemento generatore di tutte le figure, nell'antica geometria analitica si pone il punto siccome fondamento di tutti i ragionamenti e dei calcoli; l'una e l'altra sono dunque da riguardarsi siccome le due basi della geometria del piano e dello spazio punteggiati. Ora, una delle più ovvie conseguenze del principio di dualità è che la retta nel piano ed il piano nello spazio hanno egual diritto del punto di fungere da elementi generatori delle figure: messi alla prova questi nuovi elementi si manifestarono ben presto capaci di sostenere quella parte con altrettanto buon risultato, donde le origini della geometria (analitica e sintetica) del piano rigato e dello spazio di piani. Il merito di avere per tal modo quasi raddoppiato il dominio della geometria (specialmente quello della geometria analitica) spetta in gran parte a Plücker (1). Ma a Plücker ancor meno discutibilmente appartiene la gloria di avere metodicamente introdotto un terzo elemento delle figure a tre dimensioni — la retta — e di avere costruito in conseguenza una " nuova geometria dello spazio "; egli, dopo di avere abbandonato durante quasi vent'anni la geometria per consacrare alla fisica le sue poderose forze intellettuali, ritornò alla scienza che per prima gli aveva assicurata la fama, per sviluppare alcune idee originali che egli aveva schizzate sin dal 1846 (*Geometrie des Raumes,* n. 258) (2),

---

(1) " Sino ai tempi moderni, il metodo analitico, quale Cartesio lo ha creato, si reggeva per così dire sopra un solo piede. A Plücker era riserbato l'onore di collocarlo sopra due sostegni eguali introducendo il sistema di coordinate complementari. Però questa scoperta era divenuta inevitabile dopo che si erano introdotte nello spirito dei matematici le profonde vedute di Steiner " (Sylvester in *Phil. Mag.*, 37, 1850, p. 263).

(2) Che la retta fungesse talora da elemento generatore notò fin dal 1847 Staudt (*Geom. der Lage,* n. 26); si ricordi ancora (Cap. IV, n. 2) che già nel 1860 Cayley considerò una curva gobba come " complesso " delle sue secanti.

per arricchirla di una nuova e importantissima disciplina, la " Geometria della retta „ nello spazio.

Le prime pubblicazioni fatte su questo argomento dal grande geometra tedesco risalgono all'anno 1865 (*On a New Geometry of Space*, Proc. R. S., 14, 1865, e Phil. Trans., 155, 1865) (1); ivi sono enunciate le proprietà fondamentali dei complessi in generale e dei lineari in particolare, e quelle delle loro intersezioni (congruenze e superficie rigate); le dimostrazioni di esse sono ivi soltanto accennate e, secondo l'autore, dovevano venire ordite coll'aiuto delle " coordinate di una retta nello spazio „, che egli introdusse come concezione propria, ma che poi si riconobbero per casi particolari di quelle che — a tacere di Grassmann (2) — Cayley aveva poco dianzi inventato (*On a New Analytical Representation of Curves in Space,* Quart. Journ., 3, 1860) (3) e di cui in seguito sviluppò le proprietà più cospicue (*On the six Coordinates of a Line,* Cambridge Trans., 11, II Parte , 1869).

Tali comunicazioni fatte da Plücker alla Società Reale di Londra eccitarono il Battaglini a giustificare completamente le asserzioni ivi contenute; ebbe in conseguenza il suo principio quella serie di memorie intorno alla geometria della retta che valsero al nostro connazionale un posto eminente tra i fondatori di questa disciplina, memorie di cui pel momento citeremo le seguenti: *Intorno ai sistemi di rette di primo grado* (Giorn. di Mat., 6, 1868), *Intorno ai sistemi di rette di secondo grado* (Id., 7, 1869), *Intorno ai sistemi di rette di grado qualunque* (Id., 10, 1872). Riguardo ad esse osserveremo due cose: la prima è che sono ivi applicate con singolare perizia le coordinate omogenee e la teoria delle forme algebriche, alla creazione della quale il Battaglini aveva dianzi tanto efficacemente contribuito; la seconda è che, quantunque il Battaglini abbia posto a base del suo studio dei complessi quadratici un'equazione speciale (lo osservò per primo F. Klein nella Diss. che citeremo fra breve), pure

(1) Cfr. anche le note *On Complexes of the Second Order* (Brit. Ass., 1867), e *Géométrie nouvelle de l'espace* (Les mondes, 13, 1867).

(2) Tale merito di Grassmann venne segnalato da Clebsch nella sua già citata (v. p. 35) *Commemorazione di Plücker*.

(3) Una speciale illustrazione dei concetti ivi esposti si legge nella nota dello stesso autore *On the Complex of Lines which meet an Unicursal Quartic Curve* (Proc. L. M. S, 17, 1886).

molti dei ragionamenti che egli espone (si può dir tutti, eccettuati quelli intorno alla superficie singolare del complesso) valgono per qualsiasi complesso quadratico, e molte delle sue formole, con lievi modificazioni si adattano al caso generale.

2. Nel frattempo il Plücker elaborava le sue idee intorno alla geometria della retta e, dopo averne data un' applicazione nella *Théorie générale des surfaces réglées, leur classification et leur construction* (Ann. di Mat., II, 1, 1867), le esponeva metodicamente nella sua ultima opera intitolata *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement* (Leipzig, 1868-1869) (1). Dire che questo libro abbia in tutte le sue parti egual valore ed importanza sarebbe affermar cosa contraria al vero. Inoltre il Plücker non teneva in gran pregio l'eleganza dei calcoli alla quale ci abituarono Lagrange, Jacobi, Hesse e Clebsch; egli per fermo non condivideva l'opinione di Lamé che " la notazione sia per l'analisi ciò che la disposizione e la scelta delle parole è per lo stile " (2); al contrario è evidente che per lui in una ricerca di geometria analitica il calcolo ad una sola condizione doveva soddisfare, quella di condurre con celerità e sicurezza alla soluzione dei problemi proposti. Questa imperfezione, che rese antiquati prima del tempo tutti i lavori di Plücker e potrebbe farli scegliere come argomenti contro la tesi di Jacobi " mathesis et ars et scientia dicenda ", fu più dannosa all'ultimo che agli altri, perchè questo doveva inevitabilmente affrontare il paragone, se non con altre opere, almeno coll'*Analytische Geometrie des Raumes* di Hesse e colle *Vorlesungen über Dynamik* di Jacobi. Si aggiunga che Plücker, avendo per lungo tempo abbandonata la geometria e tralasciato di seguirne lo svolgimento, credette di inserire nel suo libro certe investigazioni (metriche) le quali non interessano che mediocremente essendo incluse in altre assai più generali, l'esame di casi particolari del cui valore si tenta invano di convincersi oggi, e delle formole eccessivamente complicate e prive di quella generalità e simmetria che sole varrebbero a

(1) La seconda parte fu pubblicata da F. Klein dopo la morte dell'autore.
(2) *Examen des différentes méthodes qu'on a pour résoudre les problèmes de géométrie* (Paris, 1818), p. 26.

renderle utili, epperò a salvarle dall'oblio. Malgrado questi difetti della *Neue Geometrie des Raumes,* che additammo unicamente per render ragione dell'esiguo numero di lettori che oggidì essa trova, non si può disconoscere che essa sia ricca di concetti nuovi e geniali; e sarebbe da consigliarne lo studio a chiunque volesse apprendere la geometria della retta ove gli scienziati posteriori non avessero migliorata la forma e completata la sostanza di questa nuova diramazione della matematica (1).

Primo fra i continuatori dell'opera di Plücker è F. Klein il quale anzitutto perfezionò le ricerche da questo intraprese intorno ai complessi quadratici (2); a lui inoltre dobbiamo la definizione più generale di coordinate di una retta (3); a lui, che per primo concepì la geometria dello spazio rigato indipendentemente da quella dello spazio di punti o di piani, l'importantissima osservazione che " la geometria della retta è identica allo studio di una varietà quadratica a quattro dimensioni contenuta in uno spazio lineare a cinque " (4); a lui il teorema che assicura essere ogni complesso rappresentabile mediante un'equazione unica fra le coordinate di una retta nello spazio (5). Che quell'osservazione e questo teorema siano di massimo momento venne dimostrato particolarmente dal Segre nella sua bella memoria *Sulla geometria della retta e delle sue*

---

(1) Cito qui: G. Janni, *Esposizione della nuova geometria di Plücker* (Giorn. di Mat., 8, 1870); Chelini, *Sulla nuova geometria dei complessi* (Bologna Mem., III, 1, 1870); de Paolis, *Fondamenti di una teoria dello spazio generato dai complessi lineari* (Lincei Mem., IV, 1, 1884-85); Caporali e del Pezzo, *Introduzione alla teoria dello spazio rigato* (in *Memorie di geometria di Ettore Caporali*, Napoli, 1888); Fouret, *Notions géométriques sur les complexes et les congruences* (Paris, 1893); G. Koenigs, *La géométrie réglée et ses applications* (Paris, 1895).

(2) *Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung 2. Grades zwischen Linien-Coordinaten auf eine canonische Form* (Diss. Bonn, 1868, ristampata in Math. Ann., 23, 1884); *Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades* (Math. Ann., 2, 1870; cfr. Veronese, *Sui gruppi* $(P)_{360}$ $(\pi)_{360}$ *delle figure di sei complessi lineari di rette due a due in involuzione*, Ann. di Mat., II, 11, 1883).

(3) V., oltre ai due lavori citati nella nota precedente, l'articolo sopra *Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten* (Math. Ann., 2, 1870).

(4) Veggasi la fondamentale memoria *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie* (Math. Ann., 5, 1872).

(5) *Ueber einen liniengeometrischen Satz* (Götting. Nachr., 1872, o Math. Ann., 22, 1883).

serie quadratiche (Torino Mem., II, 37, 1884) (1), che nessun geometra può esonerarsi dallo studiare.

3. Nel campo aperto da Plücker entrò ben presto il Pasch, il quale diede degli eleganti sviluppi analitici intorno ai complessi lineari (*Zur Theorie der linearen Complexe,* Journ. f. Math., 75, 1873), e fece intorno alla superficie singolare di un complesso qualsivoglia delle osservazioni destinate a rimanere (*Zur Theorie der Complexen und Congruenzen von Geraden,* Giessen, 1870; *Ueber die Brennflächen der Strahlensysteme und die Singularitätenflächen der Complexe,* Journ. f. Math., 76, 1873). D'altronde una nuova definizione per le coordinate di una retta è esposta nella *Note sur un système de coordonnées linéaires dans l'espace* dello Zeuthen (Math. Ann., 1, 1869; cfr. Chelini, *Sulla composizione geometricà de' sistemi di rette, di aree e di punti,* Bologna Mem., III, 1, 1870), la quale, toccando questioni metriche a cui dànno luogo i complessi di 1° grado, ci porge il destro di nominare l'articolo del Drach *Zur Theorie der Raumgeraden und der linearen Complexe* (Math. Ann., 2, 1870).

L'applicazione dell'algebra moderna alla geometria della retta fu tentata dal Battaglini (2), cominciata da Clebsch colle due bellissime memorie *Ueber die Plücker'schen Complexe* (Math. Ann., 2, 1870) e *Ueber die Complexflächen und die Singularitätenflächen der Complexe* (Id., 5, 1872), e continuata dopo un lungo intervallo da E. Waelsch (*Zur Invariantentheorie der Liniengeometrie,* Wiener Ber., 98, 1889, e Math. Ann., 37, 1890), e, in un certo senso, da F. Mertens (*Die Gleichung des Strahlencomplexes welcher aus allen die Kanten des gemeinschaftlichen Polartetraeders zweier Flächen II Ordnung schneidenden Geraden besteht,* Wiener

(1) V. anche l'articolo dello stesso autore *Sur une expression nouvelle du moment mutuel de deux complexes* (Journ. f. Math., 99, 1886).

(2) Nota a tal proposito il d'Ovidio, in una *Commemorazione* già da noi citata (pag. 64, nota 1), che al Battaglini " spetta altresì il gran merito di essere stato il primo a recare sistematicamente e largamente nelle ricerche sui complessi il potente sussidio della teoria delle forme algebriche; al qual merito si aggiunga quello di essere stato il primo a introdurre nello studio dei complessi la notazione *ombrale* o *simbolica* che il Clebsch poscia (Math. Ann., 1869) perfezionò, rendendo i simboli più snodati e più atti al passaggio da formole in coordinate di rette a quelle in coordinate di punti o di piani ".

Ber., 91, 1885; e *Invariante Gebilde von Nullsystemen,* Id., 97, 1888) e da G. Pick (*Ueber das System der covarianten Strahlencomplexe zweier Flächen zweiter Ordnung,* Id., 100, 1891).

La classificazione dei complessi quadratici venne schizzata da Klein nella precitata Diss. e poi eseguita da A. Weiler nella memoria *Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades* (Math. Ann., 7, 1874), in cui non si può a meno di deplorare il considerevole numero di gravi inesattezze (1). Le " forme " di detti complessi si trovano invece considerate nella memoria del Reye *Ueber die Hauptarten der allgemeinen quadratischen Strahlencomplexe und Complexgewebe* (Journ. f. Math., 98, 1885).

Delle proprietà infinitesimali dello spazio rigato trattarono F. Klein nell' importante lavoro *Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen* (Math. Ann., 5, 1872), G. Koenigs nella tesi *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé* (Ann. Éc. norm., II, 11, 1882), H. Bourget nella nota sulla *Représentation géométrique des propriétés infinitésimales du premier ordre des complexes* (C. R., 104, 1887), E. Waelsch nell'articolo *Zur Infinitesimalgeometrie der Strahlencongruenzen und Flächen* (Wiener Ber., 100, 1891), ed E. Cesàro in quello *Sulla geometria intrinseca delle congruenze* (Napoli Rend., II, 8, 1894); lavori che sono più o meno intimamente connessi alla grande memoria di S. Lie *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe* (Math. Ann., 5, 1872), nella quale inoltre è messo in luce il legame che esiste fra la geometria dello spazio di rette e la geometria dello spazio di sfere, ed è dimostrato quanta utilità l'una e l'altra possono ritrarre da questo inatteso ravvicinamento (2). Invece l' analogia esistente fra le proprietà dell'insieme delle rette e quelle dello spazio delle coniche di un piano venne indicata nel 1870 dal Cremona in una lettera al Beltrami

---

(1) Le principali furono rilevate e corrette dal Segre nelle *Note sur les complexes quadratiques dont la surface singulière est une surface du second ordre double* (Math. Ann., 23, 1883).

(2) Cfr. la nota del Cremona, *Sulla corrispondenza fra la teoria dei sistemi di rette e la teoria delle superficie* (Lincei Atti, II, 3, 1875), ed il notevole scritto del Segre, *Sulle geometrie metriche dei complessi e delle sfere e sulle loro mutue analogie* (Torino Atti, 19, 1884).

inserita nel t. 8 del Giorn. di Mat.„ svolta dall'Aschieri (1), e discussa poi dal Segre (2).

In due importantissime memorie (*Zur Theorie der windschiefen Flächen,* Math. Ann., 8, 1875; *Ueber Complexe und Congruenzen,* Id., 9, 1876) in cui l'autore rivelò una non comune abilità di analista, il Voss determinò le singolarità degli enti proprî alla geometria della retta, argomento che venne poi trattato con i metodi che gli sono proprî (v. Cap. IX, n. 11) da H. Schubert (*Singularitäten des Complexe n^{ten} Grades,* Id., 12, 1877). Il Voss stesso si occupò poi anche della teoria delle quàdriche considerate come intersezioni di complessi lineari nella memoria intitolata *Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades* (Id., 10, 1876).

Il numero delle rette dello spazio che soddisfanno a quattro date condizioni fu determinato e poi sfruttato dall' Halphen (*Sur le nombre des droites qui satisfont à des conditions données,* C. R., 68, 1869; *Sur les droites qui satisfont à des conditions données,* Id., 73, 1871, e 74, 1872; *Applications nouvelles d'une proposition sur les congruences de droites,* Bull. S. M. F., 1, 1873) (3).

La rappresentazione del complesso lineare sullo spazio punteggiato venne indicata per la prima volta da F. Klein (4) e studiata dal Caporali prima (*Sui complessi e sulle congruenze di 2° grado,* Lincei Mem., III, 2, 1877-78), e dal Del Pezzo poi (*Intorno alla rappresentazione del complesso lineare di rette sullo spazio di punti a tre dimensioni,* Palermo Rend., 1, 1884-87); differenti da queste sono le leggi di corrispondenza esposte dall'Aschieri nella memoria *Sopra una classe di trasformazioni razionali in spazi a tre dimensioni* (Mem. Ist. Lomb., III, 2, 1879), da A. Porchiesi nella nota su *Una rappresentazione del com-*

---

(1) *Sulla rappresentazione dello spazio rigato con un sistema di coniche in un piano; Imagine piana dei complessi e delle loro intersezioni* (Rend. Ist. Lomb., II, 12, 1879); *Fondamenti per una geometria dello spazio composto di rette* (Mem. Ist. Lomb., III, 6, 1883).

(2) *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano e alla sua rappresentazione sulla geometria dei complessi lineari di rette* (Torino Atti, 20, 1885).

(3) Cfr. anche le due note dello stesso autore *Sur le mouvement d'une droite* (Bull. S. M. F., 1, 1873), e *Sur le déplacement d'un solide invariable* (Id., 2, 1874).

(4) Nello scritto del Nöther *Zur Theorie der algebraischen Funktionen mehrerer complexen Variabeln* (Gött. Nachr., 1869).

plesso lineare sullo spazio ordinario (Lincei Rend., IV, 1, 1885), e da Schumacher nel § 2 della sua *Classification der algebraischen Strahlensysteme* (Math. Ann., 37, 1890). Finalmente di rappresentazioni dello spazio rigato sopra una varietà lineare a quattro dimensioni trattano le seguenti mêmorie: F. Chizzoni, *Sulla corrispondenza univoca fra le rette di uno spazio ordinario e i punti di uno spazio lineare a quattro dimensioni* (Atti dell'Acc. Gioenia di Scienze naturali, III, 20, Catania, 1887); Aschieri, *Sulla curva normale di uno spazio a quattro dimensioni* (Lincei Mem., IV, 4, 1887); G. Loria, *Di due rappresentazioni univoche dello spazio rigato su una forma fondamentale di 4ª specie* (Giorn. di Mat., 27, 1889); M. Pieri, *Sulla geometria projettiva delle forme di 4ª specie* (Id., 28, 1890); M. Pannelli, *Sulla più semplice trasformazione birazionale dello spazio ordinario rigato in uno spazio lineare a quattro dimensioni* (Lincei Rend., IV, 6, 1890_1).

4. Il complesso lineare, avanti di dar materia al primo capitolo della nuova geometria di Plücker, era stato studiato da tre distinti geometri, cioè: da Gaetano Giorgini (1795-1874) (1) nel 1827 (v. la memoria *Sopra alcune proprietà de' piani de' momenti principali e delle coppie di forze equivalenti,* Mem. Soc. XL, 20, 1828), dal Möbius nel 1828 (2) (v. l'articolo *Ueber eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume,* Journ. f. Math., 10, 1833), finalmente da Chasles (*Mémoire de géométrie pure sur les systèmes des forces,* Corr. math., 6, 1830, e *Mémoire de géométrie sur deux principes* ecc., che fa seguito all'*Aperçu historique*) (3). Questi poi lo incontrò nel corso di altre ricerche

---

(1) Cfr. G. Loria, *Intorno a la vita e le opere di Gaetano Giorgini* (Giorn. di Mat., 31, 1893).

(2) Con maggiore precisione si può dire che fu il 5 febbraio 1828 il giorno della scoperta, da parte di Möbius, del complesso lineare.

(3) A questi tre geometri non isfuggì il significato del complesso lineare nella teoria dei moti infinitesimi e della composizione delle forze. Molti sviluppi relativi a tali argomenti si trovano nel Cap. I dei pregevoli *Mélanges de géométrie pure* (Paris, 1856) del de Jonquières.

Aggiungiamo che la relazione fra la geometria della retta e la meccanica fu anche rilevata da Plücker nella nota *Fundamental Wiews regarding Mechanics* (Phil. Trans., 156, 1866) e sviluppata più tardi dal Klein nella *Notiz betreffend den Zusammenhang der Liniengeometrie und der Mechanick starrer Körper* (Math. Ann., 4, 1871; cfr. anche W. Fiedler, *Geometrie und Geomechanick,* Wolf Zeitschr., 21, 1876) e più completamente R. Stawell Ball nella

di geometria pura (v. la memoria intitolata *Propriétés nouvelles de l'hyperboloïde à une nappe,* Journ. de Math., 4, 1839), e si pose così alla testa del drappello di coloro che trattarono le questioni di geometria della retta senza servirsi di coordinate; che tale manipolo di combattenti sia in breve tempo divenuto una legione di prodi emerge dal seguente elenco di memorie: O. Hermes, *Ueber Strahlensysteme der ersten Ordnung und der ersten Classe* (Journ. f. Math., 67, 1867); T. Reye, *Lehrsätze über das Strahlensystem erster Ordnung und erster Klasse und den linearen Strahlencomplex* (Id., 69, 1868) (1), *Bemerkenswerthe Eigenschaft der Schraubenlinie* (Zeitschr. f. Math., 15, 1870), *Ueber Strahlensysteme zweiter Klasse un die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit sechszehn Knotenpunkten* (Journ. f. Math., 86, 1879); *Ueber das Strahlensystem zweiter Klasse sechster Ordnung von der ersten Art* (Id., 93, 1882), *Ueber lineare und quadratische Strahlencomplexe und Complexen-gewebe* (Id., 95, 1883), e *Ueber die Singularitätenflächen quadratiscscher Strahlencomplexe und ihre Haupttangentencurven,* Id., 97, 1884 (2); Tognoli, *Intorno ad alcune questioni generali sulla teoria dei complessi, risolute col metodo geometrico puro* (Giorn. di Mat., 9, 1871); Silldorf, *Ueber das Strahlensystem n*[ter] *Ordnung und 1*[er] *Klasse und den linearen Strahlencomplex* (Zeitschr. f. Math., 20, 1875); F. Schur, *Geometrische Untersuchungen über Strahlencomplexe 1. und 2. Grades* (Diss. Berlin, 1879,

---

bella opera intitolata *The Theory of Screws* (Dublin, 1876). Cfr. anche le note del Battaglini, *Sulla composizione delle forze, Sulla teoria dei momenti, Sulle serie di sistemi di forze* e *Sulle dinami in involuzione* (Napoli Atti e Rend., 1869), nonchè quelle *Sul movimento geometrico infinitesimo di un sistema rigido* e *Sul movimento geometrico finito di un sistema rigido* (Napoli Rend., 1870).

Da ultimo va notato che la teoria dei complessi lineari ha somministrato alla Statica grafica una delle sue più eleganti teorie, quella delle figure reciproche. V.: Clerk Maxwell, *On Reciprocal Figures and Diagrams of Forces* (Phil. Mag., 28, 1864) e *On Reciprocal Figures Frames and Diagrams of Forces* (Edinburgh Trans., 26, 1872); Culmann, *Lehrbuch der graphischen Statik* (Zürich, 1866); Cremona, *Le figure reciproche della statica grafica* (Milano, 1872); Hauck, *Ueber die reciproken Figuren der graphischen Statik* (Journ. f. Math., 100, 1887); Schur, *Ueber die reciproken Figuren der graphischen Statik* (Zeitschr. f. Math., 40, 1895).

(1) Cfr. Walther, *Zur Theorie des Strahlenssystems 1. Ordnung 1. Classe und des linearen Strahlencomplexes. Analytische Ableitung einiger Sätze von Reye* (Diss. Leipzig, 1889).

(2) A queste va unita la memoria che lo stesso autore pubblicò in Journ. f. Math., 98, e che noi nominammo nel n. prec.

e Math. Ann., 15, 1879) (1); Bertini, *Sui complessi di secondo grado* (Giorn. di Mat., 17, 1879), e *Sulla congruenza di 2ª ordine, 2ª classe e 1ª specie, dotata soltanto di superficie focale* (Lincei Trans., 1879); d'Ovidio, *Nota sulle proprietà fondamentali dei complessi lineari* (Torino Atti, 16, 1881); W. Stahl, *Das Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse* (Journ. f. Math., 91, 1881) (2), *Ueber das Strahlensystem zweiter Ordnung und zweiter Klasse* (Id., 92, 1882), *Zur synthetischen Construction der Complexe zweiten Grades* (id., 93, 1882), *Zur Polarentheorie der Complexe zweiten Grades* (Id., 94, 1883), *Ueber Strahlensysteme zweiter Ordnung* (Id., 95, 1883), e *Das Strahlensystem vierter Ordnung zweiter Klasse* (Id., 97, 1884); W. Fiedler, *Geometrische Mittheilungen,* II (Wolf Zeitschr., 24, 1882); A. Weiler, *Eine elementare Betrachtung über Strahlencongruenzen* (Zeitschr. f. Math., 31, 1886); G. Loria, *Rappresentazione su un piano delle congruenze* $[2,6]_2$ *e* $[2,7]$ (Torino Atti, 21, 1886); C. Arnoldt, *Einige Untersuchungen über quadratische Strahlencomplexe* (Diss. Strassburg, 1887); Küpper, *Die Schraubenbewegung, das Nullsystem und der lineare Complexe* (Monatshefte, 1, 1890), *Ueber benachbarte, windschiefer Strahlen im linearen Complexe* (Ivi), e *Geometrische Betrachtungen über den Strahlencomplex und die Congruenz* (Prager Abh., VII, 5, 1891); Fouret, *Sur les congruences de droites du premier ordre et de la première classe* (Bull. S. M. F., 19, 1891); Zindler, *Ueber Büschel linearer Complexe* (Monatshefte, 3, 1892); Borgmeyer, *Geometrische Untersuchungen über den Ort der Fusspunkte der Lote welche von einem Punkte auf die Strahlen einer linearen Congruenz gefällt werden* (Diss. Münster, 1893); Franel, *Note sur les complexes linéaires* (Vierteljahrsschrift d. naturf. Ges. in Zürich, 40, 1895).

E non sapremmo chiuder meglio questa enumerazione che citando la recente opera di R. Sturm, *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung* (3)

---

(1) Cfr. Aschieri, *Sopra la rappresentazione dei complessi di 1º grado nello spazio punteggiato* (Rend. Ist. Lomb., II, 14, 1881).

(2) Cfr. E. Waelsch, *Ueber eine Strahlenconggruenz beim Hyperboloider* (Wiener Ber., 95, 1887).

(3) I. Theil: *Der lineare Complex oder Strahlengewinde und der tetraedrale Complex* (Leipzig, 1892); II Theil: *Die Strahlencongruenzen erster und zweiter Ordnung* (Leipzig, 1893). Cfr. Martinetti, *Su un problema di geometria numerativa relativo alle congruenze lineari* (Riv. di Mat., 3, 1893).
È promesso un terzo volume sopra i complessi quadratici in generale,

in cui non soltanto sono fatte conoscere delle idee originali, delle proposizioni importanti ed una nuova nomenclatura, ma sono esposti con buon ordine i frutti più cospicui che furono raccolti nel campo che andiamo percorrendo.

Non è fuor di proposito il ricordare qui l'*Application de la théorie des complexes linéaires à l'étude des surfaces et des courbes gauches* (Ann. Éc. norm., II, 6, 1877) del Picard, ed il notare che alla geometria della retta sono stati applicati i metodi analitico-geometrici di Hamilton e Grassmann, come lo provano i seguenti scritti: Genty, *Mémoire de géométrie vectorielle sur les complexes du second ordre qui ont un centre de figure* (Journ. de Math., III, 8, 1882); A. Buchheim, *On the Application of Quaternions to the Theory of the Linear Complex and the Linear Congruence* (Mess., II, 12, 1883), e *On the Quaternion Treatment of the Linear Complex* (Id., 13, 1884); Gorton, *Systems of Rays Normal to a Surface* (Am. Journ., 13, 1890); E. Müller, *Die Liniengeometrie nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre* (Monatshefte, 3, 1892).

5. Accanto alla copiosa collezione di lavori dovuti all'impulso dato da Plücker, fa mestieri descriverne un' altra di indole differente. Essa abbraccia in sostanza la " geometria differenziale dello spazio rigato ", e trae le proprie origini dalle ricerche di Monge e dei suoi discepoli intorno alle normali di una superficie di cui abbiamo fatto cenno nel n. 4 del Cap. V (1) e da quelle generali del Malus e del Dupin, ricordate in fine del n. 5 del Cap. stesso, sopra i sistemi di raggi rettilinei. Tali indagini vennero continuate in Francia dal Gergonne (2), dal Quetelet (3), da C. Sturm (1803-1855) (4), da

---

del quale intanto possiamo annunziare il battistrada nella nota *Ueber den allgemeinen Complex zweiten Grades* (Berliner Ber., 1894).

(1) Ricordiamo anche le già nominate memorie del Mannheim (v. Cap. V, n. 10), del Lilienthal e del Guichard (Id., n. 14).

(2) *Recherches sur les surfaces caustiques* (Ann. de Math., 16, 1825-26).

(3) *Sur une nouvelle manière de considérer les caustiques, produites soit par réflexion soit par réfraction* (Belgique Mém., 3, 1826), e *Résumé d'une nouvelle théorie des caustiques, suivie de différentes applications à la théorie des projections stéréographiques* (Id., 4, 1827).

(4) *Mémoire d'optique* (Journ. de Math., 3, 1838), e *Sur la théorie de la vision* (C. R., 20, 1845). Cfr. Lévistal, *Recherches d'optique géométrique* (Ann. Éc. norm., 4, 1867).

A. Transon (1); in Inghilterra esse lo furono da W. R. Hamilton (2). Agli studi di quest' ultimo dobbiamo se Kummer si è occupato della teoria di cui andiamo descrivendo le fasi di svolgimento, apportandovi delle modificazioni così radicali da chiudere un'èra per aprirne un' altra.

La prima delle memorie di quel grande matematico sui sistemi di ∞^2 rette (*Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme,* Journ. f. Math., 57, 1860) ha, come dichiara l'autore, " lo scopo di far entrare la teoria dei sistemi di raggi, trattata per la prima volta da Hamilton, nel campo della geometria analitica dello spazio, stabilendola sopra una nuova base, ed in pari tempo di completarla in certi punti importanti „. Fra le innovazioni da lui apportate vanno segnalati il concetto e la misura di " densità di un sistema di raggi „, quantità che, pei sistemi di raggi costituiti dalle normali ad una superficie, coincide colla misura della curvatura di questa. " Si vede anche qui (osserva Kummer) che i concetti introdotti nella scienza da Gauss hanno di regola quei caratteri di vera generalità, grazie ai quali essi esercitano la loro influenza assai più in là del campo pel quale furono originariamente creati „.

A dimostrare che questo lavoro del grande geometra tedesco, non soltanto non passò inosservato, ma esercitò un'azione salutare, citeremo gli scritti seguenti che da esso rampollano: Möbius, *Geometrische Entwickelung der Eigenschaften unendlich-dünner Strahlenbündel* (Leipziger Ber., 14, 1862); P. Zech, *Die Geometrie unendlich dünner Strahlenbündel und die Affinität ebener Systeme* (Zeitschr. f. Math., 17, 1872); L. Matthiessen, *Neue Untersuchungen über die Lage der Brennlien unendlich dünner copulirter Strahlenbündel gegen einander und gegen einen Hauptstrahl* (Id., 29, 1884; v. anche Acta, 4, 1884); Blasendorff, *Ueber die Beziehungen zwischen zwei allgemeinen Strahlensystemen, von welchen das eine durch die verschiedensten Reflexionen und Brechungen in Medien mit beliebiger Wellenfläche aus dem anderen hervorgegangen ist* (Diss. Berlin, 1883); Weingarten, *Note über die Brennlinien eines*

---

(1) *Mémoire sur les propriétés d'un ensemble de droites menées de tous les points de l'espace suivant une loi quelconque* (Journ. Éc. pol., 38° cah., 1861).

(2) *Theory of Systems of Rays* (Irish. Trans., 15, 1828; 16, 1830-31; 17, 1837). Vedasi anche Cayley, *On the Condition for the Existence of a Surface cutting at Right Angle a given Set of Lines* (Proc. L. M. S., 8, 1876-77).

unendlich dünnen Strahlenbündels (Journ. f. Math., 98, 1885); Bianchi, *Sui sistemi doppiamente infiniti di raggi* (Ann. di Mat., II, 15, 1887) (1); Hensel, *Theorie der unendlich dünnen Strahlenbündel* (Journ. f. Math., 102, 1888); Gorton, *Line Congruences* (Am. Journ., 10, 1888); Issaly, *Nouveaux principes de la théorie des congruences de droites* (Bull. S. M. F., 16, 1888), e *Étude géométrique sur la courbure des pseudo-surfaces* (Id., 17, 1889); Cayley, *On Systems of Rays* (Mess., II, 17, 1887), e *On the Analytical Theory of the Congruency* (Proc. L. M. S., 23, 1892); Guichard, *Détermination des congruences telles que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale* (C. R., 110, 1890), e *Sur les congruences dont la surface moyenne est un plan* (Id., 114, 1892); Cosserat, *Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces* (Toulouse Ann., 1893) e *Sur les congruences rectilignes et sur le problème de Ribaucour* (C. R., 118, 1894); Demoulin, *Sur une propriété métrique commune à trois classes particulières de congruences rectilignes* (Id., 118, 1894); Waelsch, *Sur le premier invariant différentiel projectif des congruences rectilignes* (C. R., 118, 1894).

6. Di originalità maggiore della memoria di Kummer analizzata nel n. preced., è fornita l'altra dello stesso geometra *Ueber die algebraischen Strahlensysteme, insbesondere über die der ersten und zweiten Ordnung* (Berliner Abh., 1866) (2), nella quale l'autore con abilità straordinaria pervenne a determinare i sistemi algebrici doppiamente infiniti di raggi di ordini 1 e 2, le equazioni che rappresentano essi e le loro superficie focali (sono le superficie di quarto ordine con punti singolari di cui abbiamo fatto cenno nel n. 8 del Cap. III), le singolarità di quelli e di queste, le configurazioni a cui dànno luogo i loro punti ed i loro piani eccezionali. Questi pregi, aggiunti alla perfezione dello stile di Kummer, ben presto fecero ascrivere il lavoro in discorso fra le scritture classiche.

A stabilire diversamente le verità insegnate nell'or citata

---

(1) Sono ivi studiate le congruenze assai notevoli per le quali è costante tanto la distanza dei fuochi quanto quella dei punti limiti.

(2) Cfr. A. Weiler, *Ueber die Kummer'sche Darstellung der Strahlensysteme zweiter Ordnung* (Wolf Zeitschr., 29, 1884).

scrittura s'industriarono parecchi geometri; sono in parte i sintetici che ricordammo nel n. 4, in parte quelli che studiarono delle speciali forme di rette di cui parleremo nel n. seg. Qui va notato che alcune aggiunte alle relazioni scoperte da Kummer fra i numeri delle singolarità di una congruenza si leggono nella memoria di U. Masoni *Sui connessi conici ed in particolare sui sistemi di rette del 2° ordine* (Napoli Rend., 22, 1884); altre non meno importanti sono dovute a R. Sturm e R. Schumacher (1), le quali arrecarono un notevole perfezionamento ai risultati dianzi conseguiti, perchè condussero alla scoperta di nuovi ed interessanti sistemi di raggi; esse sono esposte metodicamente nel secondo volume dell'opera di maggior lena (v. pag. 216) del primo dei prelodati geometri, ma entrarono nel dominio del pubblico, qualche anno più presto, grazie alle seguenti memorie: Sturm, *Ueber die Zahl und Lage der singulären Punkte bei den Strahlencongruenzen zweiter Ordnung* (Götting. Nachr., 1888), *Einteilung der Strahlencongruenzen zweiter Ordnung mit Brenn- oder singulären Linien* (Math. Ann., 36, 1889), e *Ueber die sogenannten Strahlen-Congruenzen ohne Brennfläche* (Hamburger Mitth., 2, 1889); Schumacher, *Classification der algebraischen Strahlensysteme* (Math. Ann., 37, 1890), e *Zur Eintheilung der Strahlencongruenzen 2. Ordnung mit Brenn- oder singulären Linien* (Id., 38, 1891).

Questi scritti sembrano segnare il termine della pausa nella produzione di lavori originali che tenne dietro alle memorie di Kummer; e fra le scritture che debbono venir citate come ulteriore sintomo di tale risveglio vanno ricordate segnatamente le seguenti del Montesano: *Su una congruenza di rette di 2° ordine e di 4ª classe* (Torino Atti, 27, 1892); *Su due congruenze di rette di 2° ordine e di 6ª classe* (Lincei Rend., V, 1, 1892_2); *La rappresentazione su di un piano delle congruenze di rette di secondo ordine dotate di linea singolare* (Palermo Rend., 7, 1893).

7. Fra i complessi speciali venne particolarmente studiato quello di secondo grado la cui superficie singolare è costituita

(1) Al Schumacher la geometria della retta è debitrice di un importante progresso, l'introduzione cioè di un terzo numero, oltre l'ordine e la classe, per caratterizzare completamente una congruenza; è quel numero che egli chiama *Art* e che lo Sturm preferì designare col nome di *Rang*.

dalle facce e dai vertici di un tetraedro. Se ne occupò per primo (nel caso generale ed in un caso speciale notevole offerto dalla geometria metrica delle quàdriche) il Reye in *Die Geometrie der Lage* (la cui prima edizione risale al 1868) (1); donde il nome di " complesso di Reye " sotto cui vien talvolta designato invece che sotto quello più espressivo di " complesso tetraedrale ". In seguito esso fu studiato nei lavori seguenti: Lie, *Ueber die Reciprocitätsverhältnisse des Reye'schen Complexes* (Götting. Nachr., 1870); Weiler, *Eine Abbildung des tetraedralen Complexes auf den Punktraum* (Zeitschr. f. Math., 22, 1877), e *Ueber den Reye'schen Axencomplex* (Id., 28, 1883); Aschieri, *Sui complessi tetraedrali* (Rend. Ist. Lomb., II, 12, 1879); Battaglini, *Sui complessi di 2° grado* (Giorn. di Mat., 17, 1879); G. Loria, *Intorno alla geometria su un complesso tetraedrale* (Torino Atti, 19, 1884); F. Machovec, *Beiträge zu den Eigenschaften des Axencomplexes der Flächen zweiten Grades und des allgemeinen tetraedralen Complexes* (Prager Ber., 1886); Ameseder, *Ueber die linearen Transformationen des tetraedralen Complexes in sich* (Wiener Ber., 98, 1888) (2). I casi particolari che può presentare il complesso in questione si trovano determinati e descritti nella nota *Su le corrispondenze projettive fra due piani e fra due spazi* (Giorn. di Mat., 23, 1884) di G. Loria.

Un altro speciale complesso quadratico è quello di cui Battaglini studiò come complesso quadratico generale (3); lo si chiama " complesso di Battaglini ", o, poichè la sua superficie singolare è un tetraedroide di Cayley (v. Cap. III, n. 11), " complesso tetraedroidale ". Le sue principali proprietà specifiche si trovano dimostrate negli scritti seguenti: Aschieri, *Sopra un complesso di 2° grado* (Giorn. di Mat., 8, 1870), e *Sopra un particolare complesso di rette del secondo grado* (Bologna Mem., III, 10, 1879); Segre, *Sopra una trasformazione irrazionale dello spazio e sua applicazione allo studio del complesso quadratico di Battaglini*

---

(1) V. a questo proposito la notizia storica inserita dal Reye nella 3ª ed. della sua opera (II Abth., Leipzig, 1892, p. 147-148).

(2) Si può unire a questi lo scritto di G. Scheffers sopra *Eine Abbildung der Geraden des Raumes in der Ebene* (Leipziger Ber., 47, 1895), ove una speciale rappresentazione delle rette dello spazio sopra le coppie di rette del piano viene applicata allo studio del complesso di cui ora discorriamo.

(3) La sua equazione non contiene che i quadrati delle coordinate tetraedriche di una retta.

(Id., 21, 1883); Schur, *Ueber einen das System zweier Flächen zweiten Grades betreffenden Satz* (Math. Ann., 21, 1883) (1); C. Segre e G. Loria, *Sur les différentes espèces de complexes du 2ᵉ dègré de droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre* (Id., 23, 1884); Weiler, *Bemerkungen über einige Complexe* (Zeitschr. f. Math., 29, 1884); Ernst, *Ueber Complexe zweiten Grades welche durch Flächenpaare 2. Grades erzeugt werden* (Diss. München, 1885), Montesano, *Su alcuni complessi di rette Battaglini* (Napoli Rend., 25, 1886); F. Hofmann, *Die synthetischen Grundlagen der Theorie des Tetraedroids-Complex* (Arch. der Math., II, 5, 1887). Di un caso speciale metrico del complesso di Battaglini si occuparono il Painvin (*Étude d'un complexe du second ordre,* Bull. Sc. math., 2, 1870, ò Nouv. Ann., II, 11, 1872; *Étude d'un système de rayons,* Journ. de Math., II, 19, 1874) ed il Demoulin (*Sur le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires,* Bull. S. M. F., 20, 1892) (2).

Alla geometria metrica devono anche la loro origine i complessi che si trovano studiati nella nota del Segre *Sur les droites qui ont des moments donnés par rapport à des droites fixes* (Journ. f. Math., 97, 1884), negli scritti dello Schoute *Sur un complexe du troisième ordre* (Ass. fr., 1887), *Étude géométrique d'un complexe* (C. R., 104, 1887), e *Sur le complexe des droites dont les distances à deux droites données sont entre elles dans un rapport constant* (Ann. de l'Éc. pol. de Delft, 3, 1887), nella Diss. di J. B. Eck, *Ueber die Vertheilung der Axen der Rotationsflächen 2. Grades, welche durch gegebene Punkte gehen* (Münster, 1890), nella memoria di F. Enriques sopra *Alcune proprietà metriche dei complessi di rette e in particolare di quelli simmetrici rispetto ad assi* (Pisa Ann., 1891), nell'*Étude* del Rouquet *d'un complexe du sixième ordre* (Toulouse Ann., 3, 1891 (3), nella Diss. di H. Menzel *Ueber die Bewegung einer starren Geraden welche mit mehreren von ihren Punkten in festen Ebenen oder auf festen Ge-*

---

(1) Cfr. Franel, *Sur le système de quatre droites dans l'espace* (Vierteljahrsschrift d. Naturf. Ges. zu Zürich, 39, 1894).

(2) I matematici francesi sogliono chiamare " complesso di Painvin " appunto l'insieme delle rette da cui escono coppie di piani ortogonali di una quàdrica.

(3) Il complesso è il luogo delle direttrici delle sezioni piane d'una quàdrica.

raden gleitet (Münster, 1891), e nella memoria di E. Cosserat *Sur une classe de complexes de droites* (Mém. de l'Acad. de Toulouse, IX, 4, 1892).

Citeremo ancora la nota di A. Weiler, *Die Involution auf einer Raumcurve dritter Ordnung und der daraus entstehende Complex* (Zeitschr. f. Math., 24, 1879) (1), lo studio *Sugli enti geometrici dello spazio di rette generati dalle intersezioni dei complessi corrispondenti in due o più fasci projettivi di complessi lineari* (Piazza Armerina, 1882) del Roccella, ed il lavoro del Montesano *Sui complessi di rette di secondo grado generati da due fasci projettivi di complessi lineari* (Napoli, 1886), il quale, al pari della nota dell'Aschieri intitolata *Di una particolare corrispondenza univoca fra elementi di spazi a tre dimensioni* (Rend. Ist. Lomb., II, 13, 1880), si riferisce ai complessi di 2° grado aventi per superficie singolare una rigata di 4° grado; così dicasi delle note del Weiler, *Die Erzeugung von Complexen ersten und zweiten Grades aus linearen Congruenzen* (Zeitschr. f. Math., 27, 1882, e 29, 1884), e *Einfache Erzeugung einiger Complexe zweiten grades* (Journ. f. Math., 95, 1883). Finalmente il lavoro del Kluyver, *Sur les complexes des génératrices d'un réseau de quadriques* (Nieuw arch. voor wiskunde, 19, 1892), ha comune il tema con quello del Montesano *Su di un complesso di rette di terzo grado* (Bologna Mem., V, 2, 1892).

8. Dobbiamo ora far menzione degli studî fatti intorno a speciali congruenze di ordine o classe superiore al secondo, a complemento dell'elenco dato precedentemente nel n. 4: Irmer, *Ueber Strahlensysteme dritter Ordnung mit Brenncurven* (Diss. Halle, 1870); Kummer, *Ueber diejenigen Flächen welche mit ihren reciprok polaren Flächen von gleicher Ordnung sind und dieselben Singularitäten besitzen* (Berliner Ber., 1878); Hirst, *On Congruences of the Third Order and Class* (Proc. L. M. S., 16, 1885), e *Sur la congruence Roccella du troisième ordre et de la troisième classe* (Palermo Rend., 1, 1884-87); Schumacher, *Untersuchungen über das Strahlensystem 3. Ordnung und 2. Classe ausgehend von den*

(1) È ivi studiato il complesso di terzo grado che si ottiene considerando le ∞^1 congruenze, ognuna delle quali ha per direttrici le tangenti a una cubica gobba in due punti di essa che si corrispondano in un' involuzione stabilita su di essa.

in ihm enthaltenen Regelflächen (Diss. München, 1885); Sturm, *Ueber Strahlencongruenzen von gleichem Bündel- und Feld-grade* (Journ. f. Math., 101, 1887); Bordiga, *Di una certa congruenza del terzo ordine e della sesta classe dello spazio ordinario* (Lincei Rend., IV, 6, 1890_2); Kluyver, *Sur des systèmes de rayons déduits de quatre droites données dans l'espace* (Archives Néerlandaises des sciences, 25, 1891); Fouret, *Sur la génération des congruences de droites du premier ordre et de classe quelconque* (Palermo Rend., 6, 1892); del Re, *Sopra un sistema di rette* (3, 4) (Lincei Rend., V, 2, 1892_2); Demoulins, *Sur la congruence des axes centraux des complexes linéaires passant par trois droites données* (Bull. S. M. F., 21, 1893) (1); Fano, *Sulle congruenze di rette del terzo ordine prive di linea singolare* (Torino Atti, 29, 1894); Visalli, *Sulle congruenze di grado* n *che si possono rappresentare sopra un piano* (Lincei Rend., V, 4, 1895_1); e *Sopra alcune congruenze di grado* n *dotate di una curva gobba singolare di ordine* n (Ivi).

9. Chiuderemo questo Cap. notando che la teoria delle corrispondenze, di cui diffusamente ci occuperemo nel Cap. seg., conduce a parecchie classi di congruenze speciali notevoli. Tali sono quelle che nascono congiungendo i punti di una superficie omaloide ai loro corrispondenti di un piano rappresentativo (v. Caporali, *Sopra alcuni sistemi di rette,* Napoli Rend., 18, 1879), tali quelle più generali che il Pannelli ha studiato nella memoria *Sopra le congruenze generate da due superficie i cui punti si corrispondono univocamente* (Lincei Mem., IV, 6, 1889) (2). Tali sono pure le congruenze (dette " cremoniane ") ottenute congiungendo i punti corrispondenti di due piani in corrispondenza univoca e trattate da T. Archer Hirst (1830-1892) (*On Cremonian Congruences,* Proc. L. M. S., 14, 1883; *On the Cremonian Congruences which are contained in a Linear Complex,* Id., 17, 1886) (3), e le analoghe studiate da I. Conti nella

---

(1) Questa congruenza, assieme ad una congruenza lineare, forma la completa insersezione di due complessi quadratici; ciascuno di questi è l'insieme delle rette da cui partono delle coppie di piani tangenti ortogonali di una quàdrica, cioè un " complesso di Painvin ".

(2) Per un caso speciale v. A. del Re, *Sulle congruenze* (6, 2) *delle rette che uniscono le coppie di punti omologhi di due quadriche, che si corrispondono in una determinata omografia* (Palermo Rend., 1, 1884-87).

(3) Cfr. anche la memoria di G. Loria *Su gli enti geometrici* ecc. citata nel n. 14

memoria *Sulle congruenze generate da una coppia di piani in corrispondenza doppia* (Palermo Rend., 1, 1884-87, e 2, 1888) e dal Visalli in quella *Sulle congruenze generate da due piani punteggiati in corrispondenza* (1, v) (Rend. Ist. Lomb., II, 28, 1895).

Un'origine analoga hanno le investigazioni sull'insieme delle rette che sono incidenti con due elementi corrispondenti di due piani correlativi; esse vennero fatte prima dall'Hirst (*On the Complexes Generated by two Correlative Planes*, Coll. Math., 1881) e poi di nuovo da F. Deruyts (*Construction d'un complexe de droites du second ordre et de la seconde classe,* Belgique Bull., III, 24, 1894), al quale sembra sia sfuggito di avere avuto nell'Hirst un predecessore; più generalmente, se un piano punteggiato ed un piano rigato sono in corrispondenza univoca di grado superiore al primo e si considerano le rette incidenti con due elementi corrispondenti, si ottiene un complesso che appartiene a quelli della categoria a cui è dedicata la nota del Visalli *Sui complessi generati da due piani in corrispondehza birazionale reciproca* (Lincei Rend., V, 4, 1895_1).

---

del Cap. III, e di più: E. Schöner, *Untersuchungen über das durch zwei kubisch verwandte Ebenen erzeugte Strahlensystem* (Diss. München, 1888), e del Re, *Sopra i sistemi di rette Cremoniani* (Lincei Rend., V, 3, 1893_2).

CAPITOLO VIII.

Corrispondenze, rappresentazioni, trasformazioni.

1. Fra due varietà esiste una corrispondenza se ad ogni elemento dell'una è associato un elemento od un gruppo di elementi dell'altra; affinchè a due elementi contigui dell'una corrispondano due elementi contigui dell' altra fa mestieri, come dimostrò G. Cantor (1), che le due varietà abbiano lo stesso numero di dimensioni, nel qual caso la corrispondenza è " continua ". Gli è alle trasformazioni continue che di regola il geometra si limita (2).

È impossibile dire a chi spetti il merito di avere concepita la possibilità e vista l'utilità di stabilire fra due figure una corrispondenza la quale abiliti a dedurre le proprietà dell'una da quelle dell'altra; infatti già nei *Luoghi piani* di Apollonio Pergeo esistono tracce non dubbie di speciali trasformazioni geometriche (3). Ma è nel nostro secolo che vennero formulati i concetti generali di corrispondenza fra due figure, di rappresentazione di una figura su un'altra, di trasformazione di quella in questa, e venne riconosciuta la parte fondamentale che essi hanno diritto di rappresentare nella matematica tutta, specialmente nel caso in cui la relazione sia univoca (4).

---

(1) V. la raccolta di memorie in Acta, 2, 1883.

(2) Di indole differente sono la corrispondenza stabilita da Hesse, nella nota intitolata *Ein Uebertragungsprincip* (Journ. f. Math., 66, 1866), fra i punti di un piano e le coppie di punti d'una retta, e l'analoga, suggerita dall'Hirst (*On the Representation of Points in Space by Triplets of Points on a Line*, Proc. L. M. S., 2, 1869), fra i punti di un piano e le terne di punti di una retta. L'utilità di tali rappresentazioni non fu peranco dimostrata.

(3) Cfr. l'Appendice al II Libro della mia opera già citata sopra *Le scienze esatte nell'antica Grecia*.

(4) È bene tener presente che nel campo algebrico l'utilità delle trasformazioni era stata avvertita assai prima; si rammentino infatti le numerose trasformazioni che furono suggerite per risolvere un' equazione, eseguire delle quadrature, o integrare delle equazioni differenziali.

Tale è la corrispondenza proiettiva (collineazione o correlazione) in cui ad ogni forma fondamentale contenuta in una delle varietà studiate corrisponde nell'altra una forma fondamentale della stessa specie (omonima o non). Allo studio di essa prelude quello della proiezione da un centro sopra un piano, che fu fatto, forse per la prima volta, da Cristoforo Griensberger (1561-1636) nello scritto intitolato *Prospectiva nova coelestis* (Roma, 1612) (1) e poi con la massima larghezza da Poncelet (al quale si deve il nome di " omologia „ per la proiezione centrale) nel suo grande *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris, 1822) (2). La teoria generale della collineazione venne anche efficacemente preparata da molti altri lavori, l'analisi dei quali è uno dei principali intenti dell'*Aperçu historique* di M. Chasles; ma fu studiata in tutta la generalità che comporta dal Möbius (*Der barycentrische Calcul,* Leipzig, 1827), dal Magnus (1790-1861) (*Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie der Ebene,* Berlin, 1833) e dallo Chasles (1837) nell'opera testè ricordata; venne poi rifatta con altri intendimenti in epoca a noi più vicina dal Richelot (*Ueber die einfachste Correlation in zwei räumlichen Gebieten,* Journ. f. Math., 70, 1869) e da G. Wenzel (*Ueber die einfachste allgemeine Beziehung zwischen räumlichen Gebilden,* Diss. Breslau, 1870). Inoltre alcune cospicue proprietà metriche di cui essa gode vennero scoperte da H. J. S. Smith e dal Reye, come si apprende dalle note *On the Focal Properties of Homographic Figures* (Proc. L. M. S., 2, 1868) del primo (3) e dall' articolo *Ueber die focale Eigenschaften collinearer Figuren* (Math. Ann., 46, 1895) del secondo.

2. Esaurita la determinazione delle proprietà generali della corrispondenza proiettiva e compiuto l'esame di tutti i suoi casi particolari dal punto di vista descrittivo e dei più interessanti casi notevoli offerti dalla geometria metrica, non si mancò di osservare essere importante studiare le trasformazioni proiettive godenti di proprietà speciali, sia considerate in sè, sia rispetto

---

(1) R. Wolff, *Geschichte der Astronomie* (München, 1877), p. 387.

(2) Cfr. i nn. 23 e 24 della memoria di Jacobi, *De transformatione integralis duplicis indefiniti* etc. (Journ. f. Math., 8, 1832).

(3) Si connette a questo l'altro articolo dello stesso autore *On the Focal Properties of Correlative Figures* (Proc. L. M. S., 3, 1869).

a certe altre figure; ad esempio quelle trasformazioni che ripetute più volte riconducono un punto qualsivoglia alla posizione di partenza (1), o quelle che fanno corrispondere ad un elemento di una certa figura un altro elemento della stessa.

Le prime sono le " proiettività cicliche ", di cui trattano gli scritti seguenti: F. Klein, *Zur Interpretation der complexen Elemente in der Geometrie* (Götting. Nachr., 1872, o Math. Ann., 22, 1883); Lüroth, *Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen, Zweite Abhandlung* (Math. Ann., 11, 1877), e *Ueber cyklisch-projectivische Punktgruppen in der Ebene und im Raume* (Id., 13, 1878); Schröter, *Ueber cyklisch-projective Punktquadrupel in zwei collinearen Räumen* (Id., 20, 1882); H. Wiener, *Reingeometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden* (Darmstadt, 1885); Ameseder, *Theorie der cyklischen Projectivitäten* (Wiener Ber., 98, 1889), e *Die Quintapellage collinearer Räume* (Ivi).

Le altre sono suscettibili di infinite forme, ogni figura che ammette una trasformazione proiettiva in sè stessa potendo dar luogo ad una di esse. Furono già studiate quelle che mutano in sè stesse una quàdrica, un complesso lineare od una cubica gobba; il lettore desideroso di informazioni sull'argomento deve ricorrere — oltre che alla memoria di Caporali e del Pezzo citata in nota al n. 2 del Cap. prec. e ad alcuni lavori di del Re e Brambilla nominati nel n. 7 del Cap. IV — ai seguenti scritti: Frahm, *Ueber eine Classe von linearen Transformationen* (Tübingen, 1873); Voss, *Zur Theorie der orthogonalen Substitutionen* (Math. Ann., 13, 1878); Segre, *Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale* (Torino Mem., II, 37, 1885); R. Sturm, *Ueber Collineationen und Correlationen, welche Flächen 2. Grades oder cubische Raumcurven in sich selbst transformiren* (Math. Ann., 26, 1886); Montesano, *Su le correlazioni polari dello spazio rispetto alle quali una cubica gobba è polare a sè stessa* (Lincei Mem., IV, 3, 1886).

Prima di abbandonare le corrispondenze proiettive citeremo ancora le seguenti memorie che da varî punti di vista e con

(1) Le più semplici fra queste sono le involutorie delle quali si occupò *ex-professo* Möbius nella *Theorie der collinearen Involution von Punctpaaren in einer Ebene und im Raume* (Leipziger Ber., 8, 1856).

intenti differenti risolvono delle questioni, fondamentali o complementari, che ad esse si riferiscono: R. Sturm, *Das Problem der Projectivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades* (Math. Ann., 1, 1869) (1), *Das Problem der räumlichen Projectivität* (2) (Id., 6, 1873), *Das Problem des Collineation* (Id., 10, 1876) (3); *Vereinfachung des Problems der räumlichen Projectivität* (Id., 15, 1879), *Ueber Collineation und Correlation* (Id., 22, 1883), *Ueber gleiche Punkreihen, Ebenenbüschel, Strahlenbüschel, bei collinearen Räumen* (Id., 28, 1887), e *Zur Theorie der Collineation und Correlation* (Ivi); S. Kantor, *Ueber successive lineare Transformationen* (Wiener Ber., 82, 1880), e *Ueber die allgemeinsten linearen Systeme linearer Trasformationen bei Coincidenz gleichartiger Träger und successive Anwendung der Transformationen* (Wiener Denk., 46, 1882); Rosanes, *Ueber linearabhängige Punksysteme* (Journ. f. Math., 88, 1880), *Zur Theorie der reciproken Verwandtschaften* (Id., 90, 1881), *Ueber abhängige Punktsysteme und deren Bedeutung für die reciproke Verwandschaft zweier Ebene* (Id., 95, 1883), *Zur Theorie gewisser abhängiger Punktgruppen im Raume* (Id., 100, 1887), e *Erweiterung eines bekannten Satzes auf Formen von beliebig vielen Veränderlichen* (Math. Ann., 23, 1884); Pasch, *Zur Theorie der Collineationen und der Reciprocität* (Ivi), e *Ueber Viereck, Vierseit und projective Verwandschaft in der Ebene* (Id., 26, 1886); C. Stéphanos, *Mémoire sur la représentation des*

---

(1) Il " problema della proiettività piana " si enuncia come segue: Dati in un piano due gruppi ognuno di *n* punti, i cui elementi si corrispondano univocamente, trovare altri due punti di quel piano, dai quali proiettando quei due gruppi si ottengano due fasci di raggi fra loro proiettivi, essendo omologhi due raggi che proiettano due dei dati punti fra loro corrispondenti.

(2) Il " problema della proiettività solida " è il seguente: Dati nello spazio due gruppi ognuno di *n* punti, i cui elementi si corrispondano univocamente, trovare due rette, dalle quali proiettando quei due gruppi si ottenguno due fasci di piani fra loro proiettivi, essendo omologhi due piani che proiettano due dei dati punti fra loro corrispondenti.

(3) Ecco in che cosa consiste il " problema della collineazione ": Dati nello spazio due gruppi ognuno di *n* punti, i cui elementi si corrispondano univocamente, trovare due punti dai quali proiettando quei due gruppi si ottengano due stelle di raggi fra loro proiettive, essendo omologhi due raggi che proiettano due dei punti dati fra loro corrispondenti.

È chiaro che le corrispondenze di ordine superiore al primo, di cui parleremo fra poco, dànno luogo a questioni analoghe a quelle enunciate in questa nota e nelle due precedenti; esse però, a quanto ci consta, non vennero peranco trattate.

homographies binaires par des points de l'espace avec application à l'étude des rotations sphériques (Id., 23, 1884) (1); Goldschmidt, *Coniugierte Reciprocitäten* (Zeitschr. f. Math., 30, 1885); London, *Ueber polare Fünfflache und Sechsflache räumlicher Reciprocitäten* (Diss. Breslau, 1886); Kraus, *Die geometrische Deutung von Invarianten ebener Collineationen* (Diss. Giessen, 1886); Segre, *Note sur les homographies binaires et leur faisceaux* (Journ. f. Math., 100, 1887) (2); Muth, *Die geometrische Deutung von Invarianten räumlicher Collineationen und Reciprocitäten* (Math. Ann., 33, 1889), e *Ueber Covarianten ebener Collineationen* (Id., 40, 1892); H. Küppers, *Kollineationen durch welche fünf gegebene Punkte des Raumes in dieselben fünf Punkte transformiert werden* (Diss. Münster, 1890); H. Wiener, *Ueber geometrische Analysen* (Leipziger Ber., 42, 1890, e 43, 1891), e *Ueber die aus zwei Spiegelungen zusammengesetzen Verwandschaften* (Ivi); Reye, *Ueber symbolisches Rechnen mit geometrischen Verwandschaften* (Math. Ann., 43, 1893) (3); White, *On Generating Systems of Ternary and Quaternary Linear Trasformations* (Am. Journ., 14, 1892); Bôcher, *Einige Sätze über projective Spiegelungen* (Math. Ann., 43, 1893).

3. Due, come dicemmo, sono le proprietà caratteristiche di una trasformazione proiettiva; cioè l'avere: 1° ogni punto un corrispondente determinato ed unico, 2° ogni forma fondamentale per corrispondente una forma della stessa specie (omonima o non secondochè si tratti di collineazione o di correlazione). Sopprimendo la prima di queste condizioni si ottengono le corrispondenze multiple di cui tratteremo nei nn. 6 e 12 dell'attuale Cap., sopprimendo la seconda si arriva alle corrispondenze univoche d'ordine superiore al primo delle quali, per quanto concerne il piano, ci occuperemo ora.

Un esempio notevolissimo di tali corrispondenze venne offerto nel 1822 da Poncelet, il quale, nel suo famoso *Traité*, si occupò della relazione che esiste fra le coppie di punti di un piano che sono

---

(1) In questa memoria è per la prima volta applicato con ottimo successo il calcolo con simboli di trasformazioni geometriche, calcolo di cui altri si servì poi ad ottenere nuovi importanti risultati.

(2) V. anche Sannia, *Lezioni di geometria projettiva* (1ª ed., Napoli, 1891, 2ª ed., Ivi, 1895).

(3) V. pure la 3ª edizione di *Die Geometrie der Lage*.

coniugati rispetto a tutte le coniche di un fascio, relazione in virtù della quale ad una retta corrisponde una conica circoscritta ad un triangolo fisso. — Un altro, non meno elegante, si ottiene con la seguente legge che Steiner fece conoscere dieci anni dopo nella sua *Sistematische Entwikelung:* dati due piani distinti e due rette sghembe, ad ogni punto dell'un piano si fa corrispondere la traccia sull'altro dalla retta condotta per quel punto ad appoggiarsi sulle due rette date; in conseguenza ad ogni retta di uno dei due piani corrisponde una conica dell'altro (1). La relazione geometrica che si ottiene nei due modi suddetti non differisce nella sostanza da quella che più tardi venne incidentalmente considerata da Plücker nella memoria *Ueber ein neues Princip der Geometrie und den Gebrauch allgemeiner Symbole und unbestimmter Coëfficienten* (Journ. f. Math., 5, 1830), e studiata poi analiticamente dal Magnus (*Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géometrie,* Journ. f. Math., 8, 1832; *Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie der Ebene,* Berlin, 1833) e dallo Schiaparelli (*Sulla trasformazione geometrica delle figure ed, in particolare sulla trasformazione iperbolica,* Torino Mem., 21, 1864) (2), sinteticamente dal Seydewitz (*Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittelst projectivischer Gebilde,* Arch. der Math., 7 e 8, 1846), dal Reye (*Geometrische Verwandtschaften zweiten Grades,* Zeitschr. f. Math., 11, 1866) e dal Darboux (*Sur un mode de transformation des figures et son application à la construction de la surface du deuxième ordre déterminée par neuf points,* Ann. Éc. norm., 6, 1869). — Un terzo esempio di trasformazioni quadratiche (involutorie), il quale gode di maggior splendore di rinomanza, venne adombrato da Apollonio ne' suoi *Luoghi piani* e da Steiner nel n. 20 dell' articolo *Einige geometrische Betrachtungen* (Journ. f. Math., 1, 1826); ma venne dif-

---

(1) Questa costruzione che i tedeschi chiamano " projezione di Steiner " fu ritrovata nel 1865 da A. Transon, che ne espose le più essenziali proprietà nella memoria *De la projection gauche* (Nouv. Ann., II, 4, 1865, e 5, 1866). Servendosi di essa E. Vessiot dimostrò potersi far corrispondere ad ogni curva algebrica piana dotata di soli punti multipli a tangenti distinte una curva algebrica gobba senza punti singolari (v. la nota *Sur une méthode de transformation et sur la réduction des singularités d'une courbe algébrique,* Bull. S. M. F., 22, 1894).

(2) Ivi è segnalata l'applicazione delle trasformazioni quadratiche all'analisi indeterminata di 2° grado, concetto che sarebbe forse suscettibile di ulteriore sviluppo in varie direzioni.

fusamente trattato per la prima volta dal Bellavitis nella *Teoria delle figure inverse e loro uso nella geometria elementare* (Ann. delle Scienze del Regno Lomb.-Ven., 6, 1836), e poco dopo dallo Stubbs nell'articolo *On the Application of a New Method to the Geometry of Curves and Curve Surfaces* (Phil. Mag., 23, 1843). Esso, nonchè la sua estensione allo spazio, fu anche suggerito a W. Thomson (1) da alcune ricerche di fisica matematica, e da lui designato col nome di " principio delle immagini elettriche ". Il lettore avrà già compreso che qui alludiamo alla " corrispondenza per raggi vettori reciproci " o " inversione ", in virtù della quale, dato un punto fisso O, ad ogni punto P è associato un punto P' della retta O P tale che sia O P . O P' = cost.; allora ad ogni retta e ad ogni circonferenza corrisponde di regola un'altra circonferenza, per eccezione una retta (2), ad ogni piano e ad ogni sfera di regola un'altra sfera, per eccezione un piano. — Combinando un'inversione piana con un movimento arbitrario si perviene a quell' altra notevole relazione che Möbius studiò a fondo nella grande memoria *Die Theorie der Kreisverwandschaft in rein geometrischer Darstellung* (Leipziger Abh., 2, 1855; cfr. Cayley, *Note on the " Circular Relation " of Prof. Möbius,* Quart. Journ., 2, 1858). Invece trasformandola proiettivamente nasce una nuova corrispondenza, pure involutoria, che si può costruire direttamente come segue: " Dati in un piano π un punto fisso o ed una conica Γ, si fa corrispondere ad ogni punto P di π il punto in cui la retta O P è tagliata dalla polare di P rispetto a Γ "; sotto tale forma s'incontra nel *Saggio di geometria derivata* (Nuovi Saggi dell'Acc. di Padova, 6, 1838) del Bellavitis (3), poi in un lavoro del Geiser (Mitth. der Berner Naturf. Ges., 1865) e nella me-

---

(1) *Note sur les lois élémentaires de l'électricité statique* (Journ. de Math., 10, 1845), e *Extraits de deux lettres adressées à M. Liouville* (Id., 12, 1847; cfr. Liouville, *Note au sujet de l'article précédent,* Ivi).

(2) Il concetto d'inversione è stato posto a base di una nuova classificazione delle curve piane algebriche; il Johnson nell'articolo *Classification of Plane Curves with Reference to Inversion* (The Analyst, 4, 1887) propose infatti di chiamare " grado circolare " di una curva il grado della sua equazione rispetto a $x, y, z = x^2 + y^2$. Il grado circolare non è alterato da un'inversione; due curve aventi lo stesso grado circolare appartengono alla stessa categoria. Questa classificazione non sembra però dotata di importanza tale da meritare un posto stabile nella scienza.

(3) Cfr. anche l'articolo dello stesso geometra intitolato *Principii della geometria di derivazione* (Tortolini Ann., 5, 1854).

moria dell'Hirst *On the Quadric Inversion of Plane Curves* (Proc. R. S., 14, 1865; Ann. di Mat., 7, 1865, e Giorn. di Mat., 4, 1866) (1). Concepita tale corrispondenza a questo modo si vede essere dessa suscettibile di molteplici generalizzazioni, alcune delle quali furono studiate dal Saltel. Una è la " transformation arguésienne „ (così chiamata in onore di Desargues) che si costruisce come segue: " Dati in un piano un punto fisso O e due coniche Γ_1, Γ_2, ad ogni punto P del piano si fa corrispondere il punto P' della retta $r = OP$ che è coniugato a P nell' involuzione determinata su r dalle coppie di intersezioni di questa con le due coniche date „ (2).

Mentre tutte le trasformazioni antecedentemente descritte sono quadratiche, perchè fanno corrispondere ad ogni retta una conica, quest'ultima è cubica. Di ordine qualsivoglia è invece quella (comunemente detta " trasformazione di de Jonquières „) che il de Jonquières studiò negli anni 1859 e 1860 (3) e le cui proprietà furono da lui succintamente esposte nella nota *De la transformation*

---

(1) Le costruzioni indicate sono le più celebri, ma non le uniche che siano state suggerite per le trasformazioni quadratiche; altre si leggono esposte ed applicate in alcune memorie del Battaglini (*Sulla dipendenza duplo-anarmonica,* Napoli Atti, 2, 1863), dello Schoute (*Deux cas particuliers de la transformation birationnelle,* Bull. Sc. math., II, 6, 1882, *Application de la transformation par droites symétriques à un problème de Steiner,* Id., 7, 1883, e *Quelques théorèmes géométriques,* Ass. fr., 1884), di V. Retali (*Sopra due particolari trasformazioni piane quadratiche,* Bologna Mem., IV, 10, 1890, *Sopra le tangenti doppie di alcune curve piane algebriche,* Bologna Rend., 1890, e *Sur le double contact et le contact quadriponctuel de deux coniques,* Liège Mem., II, 18, 1895), e di L. E. Dickson (*A Quadratic Transformation defined by a Conic,* Palermo Rend., 9, 1895).

(2) Saltel, *Su l'application de la transformation arguésienne à la génération des courbes et des surfaces algébriques* (Belgique Mém., 22, 1872), *Sur quelques questions de géométrie* (Belgique Bull., II, 34, 1872), e *Mémoire sur le principe arguésien unicursal et sur certains systèmes de courbes géométriques* (Belgique Mém., 23, 1873); Mansion, *Note sur les transformations arguésiennes de M. Saltel* (Belgique Bull., II, 36, 1873); Crocchi, *Proprietà derivate dalle curve e superficie arguisiane* (Giorn. di Mat., 22, 1874).

La " transformation hyperarguésienne „ dello stesso geometra non è univoca perchè nasce dalla seguente costruzione: Dati in un piano un punto fisso O e tre coniche Γ_1, Γ_2, Γ_3, ad ogni punto P del piano si fa corrispondere il punto P' della retta $r = OP$ che corrisponde a P in un'omografia determinata sopra r dalle tre coppie di punti in cui essa è tagliata dalle tre coniche date. Sostituendo alle coniche tre coppie di rette si può arrivare ad una trasformazione univoca.

(3) Essa fa corrispondere ad una retta una curva d'ordine n con un punto $(n-1)$-plo.

géométrique des figures planes (Nouv. Ann., II, 6, 1864), e completamente dimostrate nel *Mémoire sur les figures isographiques et sur un mode uniforme de génération des courbes à double courbure d'un ordre quelconque au moyen de deux faisceaux correspondants de droites,* pubblicato nel 1885 per cura del Guccia nel t. 23 del Giorn. di Mat. Del resto la possibilità di ottenere delle corrispondenze piane univoche di ordine qualsivoglia fu notata, fin dal 1833, dal Magnus nella *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätze aus der analyt. Geom. der Ebene,* il quale giunse a tale scoperta studiando l'effetto della ripetizione di una trasformazione quadratica.

4. Tale importante osservazione rimase isolata e sterile fino al giorno in cui il Cremona stabilì la teoria generale delle corrispondenze univoche fra i due piani. Le memorie in cui questo grande geometra fece conoscere le più cospicue proprietà di tali trasformazioni · sono intitolate *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* e furono pubblicate una prima volta in Bologna Mem., II, 2, 1863, e 5, 1865, ed una seconda in Giorn. di Mat., 1, 1863, e 3, 1865; più tardi vennero tradotte in francese liberamente con aggiunte dal Dewulf (*Sur les transformations géométriques des figures planes,* Bull. Sc. math., 5, 1872). Il loro contenuto divenne ben presto classico e si diffuse rapidamente grazie ai trattati di Salmon e di Clebsch-Lindemann che nominammo a pagg. 51 e 52, sicchè ci riteniamo dispensati dal descriverlo qui. Osserveremo piuttosto che un notevole perfezionamento ai risultati di Cremona arrecarono il Clebsch, dimostrando rigorosamente una proposizione che questi aveva ottenuto per via sperimentale (*Zur Theorie de Cremona'schen Transformationen,* Math. Ann., 3, 1871), ed un altro contemporaneamente il Clifford (v. i nn. 68-73 della memoria di Cayley, *On the Rational Transformation betweren two Spaces,* Proc. L. M. S., 3, 1869-71, e *Mathematical Papers by W. K. Clifford,* London, 1882, p. 538), il Rosanes (*Ueber diejenigen rationalen Substitutionen welche eine rationale Unkehrung zulassen,* Journ. f. Math., 73, 1873) ed il Nöther (*Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen,* Math. Ann., 5, 1872), che consiste nella sostituibilità di qualunque trasformazione Cremoniana con una serie di trasformazioni quadratiche, risultato questo che non toglie in alcun

modo importanza (come forse taluno potrebbe credere) alle trasformazioni di ordine superiore, e può ritenersi per equivalente alla proposizione reciproca di quella che, come dicemmo nella chiusa del n. prec., fu notata dal Magnus.

Con questi complementi si può dir chiusa l'èra di primo sviluppo della teoria delle trasformazioni piane univoche. Tuttavia molti problemi interessanti si presentavano al riguardo. Ed anzitutto la ricerca di un metodo per trovare tutte le trasformazioni di un ordine determinato; essa fu tentata in certa misura da S. Roberts nella memoria *On Professor's Cremona Transformation between two Planes and Tables relating thereto* (Proc. L. M. S., 4, 1872), e toccata dal Jung nella nota *Sulle trasformazioni birazionali di tre forme geometriche di seconda specie* (Rend. Ist. Lomb., II, 19, 1886); essa, da un certo punto di vista, si può considerare di pertinenza dell'analisi indeterminata e come tale fu studiata, se non esaurita dal Ruffini (1) e poi dal de Jonquières (2). — Un altro problema che si incontra è quello di stabilire con un numero sufficiente di coppie di elementi corrispondenti una trasformazione d'un certo ordine; ad esso, per trasformazioni quadratiche, accennarono il Reye (mem. cit. nel n. 3 di questo Cap.) ed Em. Weyr (*Analytische Untersuchung der quadratischen Verwandtschaft*, Zeitschr. f. Math., 14, 1869); di esso trattarono poi nel caso di trasformazioni cubiche e biquadratiche T. Maschke (*Ueber das Problem der Bestimmbarkeit der Cremona'schen Transformation 3. Ordnung,* Diss. Breslau, 1879) ed A. Schmidt (*Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen insbesondere derjenigen 4. Ordnung,* Diss. Breslau, 1882); ma il problema generale crediamo non sia stato ancora affrontato, quantunque, come ognuno vede, sia estrema-

---

(1) *Sulla risoluzione delle due equazioni di condizione delle trasformazioni cremoniane delle figure piane* (Bologna Mem., III, 8, 1877), e *Di un problema di analisi indeterminata che s'incontra nella teoria geometrica delle trasformazioni delle figure piane* (Id., 9, 1878).

(2) *Solution d'une question d'analyse indéterminée, qui est fondamentale dans la théorie des transformations Cremona, Sur la dérivation des solutions dans la théorie des transformations Cremona,* e *Sur les transformations géometriques birationnelles d'ordre* n (C. R., 101, 1885); *Modes de solutions d'une question d'analyse indéterminée qui est fondamentale dans la théorie des transformations Cremona* (Paris, 1885); *Étude sur une question d'analyse indéterminée* (Giorn. di Mat., 26, 1886). V. anche Guccia *Sur les transformations géométriques planes birationnelles* (C. R., 101, 1885).

mente importante. — Un'altra questione più speciale ma interessante fu trattata da S. Kantor nelle due note *Wie viele cyclische Gruppen giebt es in einer quadratischen Transformation der Ebene?*, e *Beantwortung derselben Frage für Cremona'sche Transformation* (Ann. di Mat., II, 10, 1880 (1); cfr. Hirst, *On Quadric Transformation,* Quart. Journ., 17, 1881).

Ad alcuni luoghi collegati ad una corrispondenza univoca si riferiscono i *Teoremi sulle trasformazioni Cremoniane nel piano* (Palermo Rend., 1, 1884-87; cfr. *Sur les transformations Cremona dans le plan,* C. R., 101, 1885) del Guccia, il quale ha anche fatto conoscere delle *Formole analitiche di trasformazioni Cremoniane* (Ivi). Finalmente a quelle speciali corrispondenze che sono il prodotto di una trasformazione Cremoniana e di una correlazione è dedicata la nota del Lazzeri, *Sulle reciprocità birazionali nel piano* (Lincei Rend., IV, 2, 1886_2).

Alle ricerche intorno ad una trasformazione isolata seguono naturalmente quelle sulle schiere composte di un certo numero finito od infinito di trasformazioni, in particolare sui " gruppi " (2) di tali trasformazioni; ora, per le trasformazioni Cremoniane, lo studio dei gruppi fu fatto, nell'ipotesi che il loro ordine sia finito, dall'Autonne (*Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe Cremona,* Journ. de Math., IV, 1, 1885, e 2, 1886, e *Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique crémonien,* Id., 4, 1888), e per gruppi di ordine infinito e continui da F. Enriques (*Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane nel piano* e *Sopra un gruppo continuo di trasformazioni di Jonquières nel piano,* Lincei Rend., V, 2, 1893) e poi da S. Kantor (*Theorie der endlichen Gruppen von eindeutingen Transformationen in der Ebene,* Berlin, 1895) e da G. Fano (*Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane del piano e sopra certi gruppi di trasformazioni proiettive* Palermo Rend., 10, 1896).

5. Fra le trasformazioni piane univoche speciali le più im-

---

(1) Applicando a un punto P_0 n volte di seguito una data trasformazione Cremoniana si ottengono in generale n punti $P_1 P_2 \dots P_n$: ove P_n coincida con P_0, i punti $P_0 P_1 \dots P_{n-1}$ formano ciò che il Kantor chiama " gruppo ciclico ".

(2) Come si sa, un certo numero di trasformazioni formano un " gruppo " se la successione (o il prodotto) di due qualunque di esse (distinte o non) è un'altra di quelle trasformazioni.

portanti nascono supponendo sovrapposti (conjettivi) i piani in corrispondenza; e tra esse il primo posto compete senza dubbio a quelle " involutorie ", tali cioè che non mutano scambiando le parti dei due piani. Il loro studio fu inaugurato vent'anni or sono dal Bertini in due memorie giustamente apprezzate (*Sopra una classe di trasformazioni univoche involutorie* e *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano,* Ann. di Mat., II, 8, 1877), venne continuato dal Caporali (*Sulle trasformazioni univoche piane involutorie,* Napoli Rend., 18, 1879), e poi ripreso dal Bertini stesso (*Sulle trasformazioni univoche piane e in particolare sulle involutorie,* Rend. Ist. Lomb., II, 13, 1880; *Costruzioni geometriche della trasformazione univoca di 3° ordine,* Id., 15, 1882; *Sopra alcune involuzioni piane,* Id., 16, 1883) e spinto innanzi dai di lui discepoli Martinetti (*Le involuzioni di 3ª e 4ª classe,* Ann. di Mat., II, 12, 1884; *Sopra alcune trasformazioni involutorie del piano,* Id., 13, 1885; e *Sul genere delle curve* Ω *nelle involuzioni piane di classe qualunque,* Palermo Rend., 4, 1890) e Berzolari (*Ricerche sulle trasformazioni piane, univoche, involutorie e loro applicazione alla determinazione delle involuzioni di quinta classe,* Ann. di Mat., II, 16, 1888, e *Un nuovo teorema sulle involuzioni piane,* Palermo Rend., 3, 1889). Fuori d'Italia tali trasformazioni attirarono l'attenzione del Lüroth che dedicò ad esse la notevole memoria intitolata *Rationale Flächen und involutorische Transformationen* (Freiburg, 1889); di alcuni loro casi particolari trattarono il Geiser (*Ueber zwei geometrische Probleme,* Journ. f. Math., 67, 1867) ed il Bobeck (*Ueber gewisse eindeutige involutorische Transformationen der Ebene,* Wiener Ber., 91, 1885).

Una trasformazione involutoria è caratterizzata dalla proprietà di avere per quadrato l'identità; una trasformazione univoca avente l'identità per potenza di esponente superiore a due dicesi " periodica " di ordine eguale a tale esponente. Queste importantissime corrispondenze, più generali delle involutorie, furono studiate a fondo da S. Kantor, il quale, dopo avere fatti conoscere alcuni risultati speciali sull'argomento (1), vi dedicò la

(1) Oltre alle memorie citate a pagg. 229 e 236, si veggano le seguenti: *Zur Theorie der successiven quadratischen Transformationen in der Ebene* (Wiener Ber., 82, 1880); *Sur une méthode pour traiter les transformations périodiques univoques* e *Théorie des transformations univoques* (C. R., 100, 1885).

memoria di lunga lena intitolata *Premiers fondements pour une théorie des transformations périodiques univoques* (Napoli Atti, II, 1, 1888, e 2, 1893) (1), intesa a rispondere ad una questione posta dall'Accademia di Napoli e da questa premiata (2).

Le trasformazioni univoche d'ordine n fra due piani sovrapposti ammettono in generale $n+2$ punti uniti; ma può darsi (lo prova l'esempio dell'omologia) che ne abbiano infiniti; e l'ipotesi che esista una curva unita conduce alla considerazione di speciali corrispondenze che vennero considerate dal Doehlemann (*Ueber Cremona-Transformationen der Ebene welche eine Curve enthalten die sich Punkt für Punkt selbst entspricht,* Math. Ann., 39, 1892) e dal Castelnuovo (*Sulle trasformazioni Cremoniane del piano che ammettono una curva fissa,* Lincei Rend., V, 1, 1892). — Similmente, una trasformazione univoca d'ordine n fra due piani sovrapposti ammette generalmente parlando $\frac{n(n-1)}{2}$ coppie involutorie di punti, ma può darsi ne ammetta infinite; la memoria del Doehlemann *Ueber die involutorische Gebilde welche eine ebene Cremona-Transformation, speciell die quadratische enthalten kann* (Zeitschr. f. Math., 36, 1891) tratta, fra l'altro, delle trasformazioni risultanti dal supporre l'esistenza di una curva involutoria.

Più ristretti intendimenti hanno altri lavori sopra speciali trasformazioni di ordine determinato, di alcuni dei quali vogliamo qui far menzione a complemento di quanto esponemmo nei nn. 3 e 4. Prima ci si presenta una particolare trasformazione di quart'ordine, che venne generata mediante una costruzione stereometrica e studiata da T. Cotterill (1808-1881) nella memoria *On a Correspondence of Points, such that a Curve of the* n—*th Order in one Plane corresponds to a Curve of the* 4n —*th in another Plane, with three Multiple Points of the order* n *on the Line of intersection of the Planes and three other Multiple Points of the Order* 2n (Proc. L. M. S., 2, 1869); altre del

(1) Cfr. gli articoli dello stesso autore: *Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene* (Journ. f. Math., 114, 1894), e *Neue Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene* (Acta, 19, 1895), destinati a riassumere, completare e diffondere i risultati del lavoro premiato.

(2) V.: Caporali, *Relazione sul concorso pel premio accademico nell'anno 1882* (Napoli Rend., 22, 1883).

quinto e sesto dal Le Paige (*Sur une représentation géométrique de deux transformations uniformes,* Belgique Bull., III, 3, 1882, e *Sur quelques transformations géométriques uniformes,* Id., 4, 1882), corrispondenze la cui definizione venne poi generalizzata dallo Schoute nell'articolo *Sur deux transformations géométriques uniformes* (Ass. fr., 1883); finalmente altre di ordine $2k$ ($k=2, ..., 6$) vennero fatte conoscere da R. Sturm come *Beispiele zu den Cremona'schen Ebenentransformationen* (Math. Ann., 26, 1885).

6. Una classe importante di corrispondenze (in generale non univoche) tra due piani è costituita dalle " trasformazioni isogonali ", la cui origine è da rintracciarsi nella teoria delle funzioni analitiche, perchè qualunque funzione (nel senso riemanniano) conduce ad una di quelle trasformazioni (1). Chi se ne occupò più di qualunque altro è l'Holzmüller, il quale, dopo avere esposti i risultati a cui era pervenuto in una lunga serie di memorie separate, li raccolse nella pregevole opera intitolata *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften* (Leipzig, 1883). Fra gli altri scritti che concernono lo stesso tema vanno ricordati: Siebeck, *Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen* (Journ. f. Math., 55, 1858); Durège, *Untersuchungen über die Anwendung der imaginären Grössen in der Curvenlehre* (Arch. der Math., 42, 1865); Vonder Mühll, *Ueber die Abbildung von Ebenen auf Ebenen* (Journ. f. Math., 59, 1868); Biermann, *Zur Theorie der Abbildung mittelst gebrochener rationaler Functionen* (Wiener Ber., 89, 1884); Laurin, *Sur la transformation isogonale définie par une fonction rationnelle* (Lund, 1887); Laisant, *Des rayons de courbure dans les transformations isogonales* (Bull. S. M. F., 15, 1887); Harris, *Note on the Use of Supplementary Curves in Isogonal Transformations* (Am. Journ., 14, 1892).

Le trasformazioni che conservano gli angoli furono, come testè vedemmo, studiate diffusamente ed in varî modi; altrettanto non può ripetersi per quelle in cui due aree corrispondenti qualunque sono eguali o in un rapporto costante; Möbius è

---

(1) Si veda, oltre la memoria di Gauss premiata dall'Accademia di Kopenhagen e citata più avanti (p. 245), Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grössen* (Diss. Göttingen, 1851).

forse l'unico che vi si è dedicato, ed i risultati che conseguì vennero fatti noti mediante la memoria *Ueber eine allgemeinere Art der Affinität geometrischer Figuren* (Journ. f. Math., 12, 1834).

Al pari di tali relazioni geometriche ripete la loro origine dalla geometria metrica ed è suscettibile di immediata generalizzazione allo spazio la " transformation par directions réciproques ", che il Laguerre ha inventato, svolto ed applicato nelle memorie seguenti: *Sur la géométrie de direction* (Bull. S. M. F., 8, 1880); *Sur la transformation par directions réciproques* (C. R., 92, 1881); *Sur les hypercycles* (Id., 94, 1882); *Transformations par semi-droites réciproques* (Nouv. Ann., III, 1, 1882); *Sur quelques propriétés des cycles* (Id., 2, 1883) e *Sur les courbes de directions de la troisième classe* (Ivi; cfr. anche: Dautheville, *Sur l'hypercycle et la théorie des cycles,* Bull. S. M. F., 14, 1886, e Juel, *Studie over an Transformation af Laguerre,* Nyt Tidsskrift for Math., 3. 1892); nello spazio l'analoga di essa non differisce (lo osservò C. Stéphanos nell'articolo *Sur la géométrie des sphères,* C. R., 92, 1881) da quella per mezzo della quale Lie collegò la geometria della sfera alla geometria della retta (v. pag. 212).

Ritorniamo ancora un momento alla teoria delle trasformazioni isogonali e precisamente a quelle determinate da una equazione della forma $w = f(z)$, f essendo un polinomio di grado n. Ad ogni punto z corrisponde un unico punto w, ma ad ogni punto w corrispondono n punti z le cui coordinate si ottengono risolvendo rispetto a z l'equazione $f(z) - w = 0$. Questa semplice osservazione conduce naturalmente a ricercare le proprietà dei gruppi di punti così ottenuti e le loro relazioni con i gruppi che nascono eguagliando a zero i covarianti del primo membro di quell'equazione, considerato come funzione di z; donde l'origine di un certo numero di interessanti memorie che citiamo qui, non trovando a ciò occasione più propizia: Beltrami, *Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche* (Bologna Mem., II, 9, 1869); Wedekind, *Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen* (Diss. Erlangen, 1875, e Math. Ann., 9, 1876), *Studien in binären Werthgebiet* (Karlsruhe, 1876), e *Das Doppelverhältniss und die absolute Invariante binärer biquadratischer Formen* (Math. Ann., 17, 1880); F. Lucas, *Géométrie des polynômes* (Journ. Éc. pol., 28e cah., 1880); J. de Vries, *Involutions cubiques dans le plan complexe* (Palermo Rend., 5, 1891), *Une distribution du champ*

ponctuel en groupes involutives (Archives néerlandaises etc., 23, 1891), *Zur Theorie der Involutionen* (Monatshefte, 3, 1892) e *Ueber mehrstufäge Involutionen in der complexen Ebene* (Id., 5, 1894).

Le trasformazioni isogonali hanno, quasi involontariamente, dimostrata la possibilità di corrispondenze (1, *n*), tali cioè che ad ogni elemento di una delle forme collegate corrisponda un elemento dell'altra e ad ogni elemento di questa un gruppo di *n* elementi di quella. Sono le " corrispondenze multiple " di cui, a tacer d'altri, il Cayley (nella nota *Sur quelques transmutations des lignes courbes,* Journ. de Math., 14, 1849, e 15, 1850) suggerì degli esempî e di cui Ch. Wiener si occupò, proponendo di generarle facendo corrispondere alle rette di un piano le curve di un altro piano di un dato ordine formanti un sistema lineare, i centri dei fasci di raggi di quel piano ai punti base dei fasci di questo (*Die mehrdeutige Beziehung zweier ebenen Gebilde aufeinander,* Math. Ann., 3, 1871) (1). Molto più significanti di questa sono la memoria di R. de Paolis su *Le trasformazioni piane doppie* (Lincei Mem., III, 1, 1877) e le due seguenti dello stesso autore intitolate: *La trasformazione piana doppia di secondo ordine e la sua applicazione alla geometria non-euclidea* e *La trasformazione piana doppia di terzo ordine primo genere e la sua applicazione alle curve del quarto ordine* (Id., 2, 1878), le quali diedero un fondamento sicuro e permanente alla teoria delle trasformazioni doppie, teoria a cui il Nöther consacrò la nota *Ueber die einzweideutigen Ebenentransformationen* (Erlangener Ber., 10, 1878) e il Bertini quella intitolata *Deduzione delle trasformazioni piane doppie dei tipi fondamentali delle involutorie* (Rend. Ist. Lomb., II, 22, 1889). Ed è a notarsi che i ragionamenti ed i metodi del de Paolis, con opportune lievi modificazioni, possono adattarsi allo studio delle trasformazioni multiple qualunque, come mostrarono P. Visalli nella *Memoria sulle trasformazioni geometriche* N-ple (Messina, 1884) e in una successiva *Sopra le diverse classi delle trasformazioni geometriche piane multiple* (Messina, 1884) e C. F. E. Björling nel lavoro *Zur Theorie der mehrdeutigen Ebenen-Transformation* (Stockh. Vetensk. Bihang, 13,

(1) V. anche: Steinmetz, *Multivalent and Univalent Involutory Correspondences in a Plane determined by a Net of Curves of* n^{th} *Order* (Am. Journ., 14, 1892).

1887) (1). Sullo stesso tema si consulteranno con profitto due note del Jung, *Sopra le trasformazioni piane multiple* (Lincei Rend., IV, 2, 1886_2), e *Sulle trasformazioni piane multiple d'ordine minimo* (Rend. Ist. Lomb., II, 20, 1888), geometra il quale fece poi notare che certe trasformazioni multiple sono collegate a qualsivoglia trasformazione Cremoniana (2). Aggiungiamo che la questione risoluta nella nota di F. Borghese sopra *Un problema sulle trasformazioni piane multiple* (Giorn. di Mat., 32, 1894) è la generalizzazione di quella trattata dal Kantor nelle note che citammo a pag. 236.

Una trasformazione involutoria distribuisce tutti i punti del piano in coppie ognuna delle quali è individuata da uno de' suoi elementi; più generalmente si possono considerare nel piano i gruppi costituiti da r punti e tali che ogni gruppo sia individuato da un suo elemento; un tal sistema di gruppi di punti, che può intendersi generato da una speciale trasformazione piana $(r-1)$—pla, si chiama " involuzione " e il Castelnuovo dimostrò la possibilità di far corrispondere univocamente i gruppi che lo costituiscono ai punti di un piano (*Sulla razionalità delle involuzioni piane*, Lincei Rend., V, 2, 1893_2, e Math. Ann., 44, 1894), risultato di grande importanza, oltre che per altri motivi, per le applicazioni che riceve nella teoria della rappresentazione di una superficie algebrica su di un piano.

Alle corrispondenze piane $(1, n)$ seguirebbero naturalmente quelle più generali (m, n), ma il loro studio non fu peranco, per quanto ci consta, intrapreso; però al caso $m = n = 2$ si riferiscono i due scritti seguenti: Visalli, *La trasformazione quadratica* (2, 2) (Palermo Rend., 3, 1889); Burali-Forti, *Sulle trasformazioni* (2, 2) *che si possono ottenere mediante due trasformazioni doppie* (Id., 5, 1891).

7. Il concetto di corrispondenza fra i punti di due piani si può generalizzare in varî modi. Quelli che si presentarono

(1) V. anche un frammento di Clifford in *Mathematical Papers*, p. 647.

(2) *Di due trasformazioni multiple associate a ogni trasformazione birazionale* (Rend. Ist. Lomb., II, 20, 1888), e *Di una terza trasformazione di genere* p *e di grado* p + 1 *associata a ogni trasformazione piana birazionale* (Id., II, 19, 1886). Le trasformazioni di tale classe furono poi nuovamente studiate da M. Pannelli nella nota *Sulle trasformazioni multiple associate ad ogni trasformazione piana birazionale* (Giorn. di Mat., 29, 1891).

pei primi furono la corrispondenza 1° fra i punti di un piano e le linee di un sistema doppiamente infinito (cfr. le memorie del Wiener e dello Steinmetz citate nel n. prec.) (1); 2° fra i punti di un piano e quelli di una superficie; 3° fra i punti di due spazî; 4° fra i punti dello spazio e le curve di un sistema triplicemente infinito di curve di un piano.

Quest'ultimo caso venne studiato a fondo soltanto nell'ipotesi che le curve siano circonferenze, prima da C. Crone (*Undersögelse af Figuren i Planen, sammensatte af Cirkler, vedet säregent Koordinatsystem,* Tidsskrift, III, 6, 1876), poi più completamente dal Fiedler, il quale, non solo fece alla Naturforschende Gesellschaft di Zurigo alcune comunicazioni in proposito (2), ma credette la corrispondenza in discorso abbastanza importante per essere considerata una nuova diramazione della geometria (che chiamò Ciclografia) ed esposta in un' opera speciale (3). Alla medesima relazione geometrica si riferiscono le investigazioni del Thomae sopra *Das ebene Kreissystem und seine Abbildung auf den Raum* (Zeitschr. f. Math., 29, 1894).

Incomparabilmente più significante per la geometria è la prima delle generalizzazioni suddette. Accennata da Plücker (*Analytisch-geometrische Entwickelungen,* 2, n. 724), essa fu sviluppata da Clebsch nella memoria citata qui appresso e diede origine alla " teoria dei connessi ". Gli scritti a noi noti che ad essa si riferiscono sono: Clebsch, *Ueber ein neues Grundgebilde der ana-*

(1) Il più semplice esempio di tale legame geometrico è offerto dalla correlazione fra due piani. Un altro si ha colla costruzione seguente. Sia ABC un triangolo, P un punto qualunque del suo piano. Vi è una sola conica Γ che tocca i lati del triangolo nei punti (PA, BC), (PB, CA), (PC, AB). Se si fa corrispondere P a Γ, si ha una corrispondenza della specie di quelle accennate nel testo; la quale, assieme alla sua correlativa, fu studiata dal Montag nella Diss. *Ueber ein durch die Sätze von Pascal und Brianchon vermitteltes geometrisches Beziehungssystem* (Breslau, 1871). — Altre corrispondenze analoghe si otterrebbero osservando essere P centro di una conica inscritta nel triangolo ABC, di una ad esso circoscritta e di una rispetto a cui ABC è autoconjugato. Anzi quest'ultima corrispondenza è immediatamente generalizzabile allo spazio.

(2) V. le note: *Zu zwei Abhandlungen von Steiner* (Vierteljahrsschrift der Züreher Naturf. Ges., 28, 1883); *Geometrische Mittheilungen* VII, VIII (Id., 29, 1884); *Ueber die Durchdringung gleichseitiger Rotationshyperboloide von parallelen Axen* (Acta, 5, 1884), nonchè parecchie osservazioni sparse nella 3ª ed. dell'opera *Die darstellende Geometrie.*

(3) *Cyklographie oder Konstruktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme* (Leipzig, 1882).

lytische Geometrie der Ebene (Math. Ann., 6, 1873); Godt, *Ueber den Connex 1. Ordnung und 2. Classe* (Diss. Göttingen, 1873); Armenante, *Generazione dei connessi di 2° ordine e 2ª classe* (Lincei Atti, 3, 1876); Battaglini, *Sui connessi ternarii di 2° ordine e 2ª classe in involuzione semplice* (Giorn. di Mat., 19, 1881), *Sui connessi ternarii di 1° ordine e 1ª classe* (Id., 20, 1882), e *Sulle forme ternarie bilineari* (Id., 21, 1883); C. Stéphanos, *Sur la théorie des connexes conjugués* (Bull. Sc. math., II, 4, 1880); Peano, *Costruzione dei connessi* (1, 2) *e* (2, 2) (Torino Atti, 16, 1881); Piazza, *Sulle corrispondenze* (1, 2) *e* (1, 3) (Id., 17, 1882); Pannelli, *Sui connessi ternarii di 2° ordine e di 2ª classe in involuzione doppia* (Giorn. di Mat., 26, 1888); Amodeo, *Sopra un particolare connesso* (2, 2) *con due punti singolari e due rette singolari* (Id., 25, 1885); Lazzeri, *La rappresentazione dello spazio rigato sopra un piano connesso e sua applicazione allo studio dei connessi lineo-lineari* (Atti Ist. Ven., VI, 3, 1885).

Chiediamo venia al lettore se facciamo cenno in questo momento delle ricerche di geometria dello spazio analoghe a quelle testè indicate; sono quelle consegnate nella memoria del Masoni citata a pag. 220, e nelle seguenti: Krause, *Ueber ein Gebilde der analytischen Geometrie des Raumes, welches dem Connexe zweiter Ordnung und erster Classe entspricht* (Math. Ann., 14, 1879); Battaglini, *Sulle forme quaternarie bilineari* (Giorn. di Mat., 22, 1884); Lazzeri, *Sopra i sistemi lineari di connessi quaternarii* (1, 1) (Lincei Mem., IV, 4, 1887); del Re, *Le superficie polari congiunte rispetto ad un connesso di piani e di rette e ad una superficie algebrica fondamentale* (Napoli Rend., II, 2: cfr. anche la già citata nota dello stesso autore *Sulle superficie del 4° ordine a conica doppia,* Lincei Rend., V, 2, 1893_1).

8. Assai più ricca è la letteratura matematica concernente la seconda delle cennate generalizzazioni della corrispondenza fra due piani, giacchè comprende tutti gli scritti intorno alla rappresentazione di una superficie su di un'altra, specialmente pel caso in cui questa sia piana. Ora tale rappresentazione può comprendere una porzione di una delle superficie ed essere in conseguenza applicabile anche alle superficie trascendenti, oppure può estendersi a tutta quella superficie supposta algebrica. La teoria delle rappresentazioni della prima categoria fa parte

della Geometria differenziale, mentre quella delle seconde appartiene alla Geometria delle superficie algebriche: diremo qualche cosa dell'una e dell'altra.

Le più antiche ricerche della prima specie risalgono forse ad Ipparco e Tolomeo, i quali, per aiutare i geografi, proposero di projettare la superficie terrestre da un polo sul piano dell'equatore, inventarono cioè quella che oggi si chiama " projezione stereografica ". Origine analoga hanno la projezione immaginata da Mercatore (1512-1594), nel 1550 o nel 1569 (1), e le ricerche compiute sul finire del secolo scorso da Lambert (1728-1777) e Lagrange sulla costruzione delle carte geografiche (2), nonchè altre analoghe che qui non enumeriamo perchè appartengono alle applicazioni della matematica alla geografia, rimandando alle opere speciali sull'argomento (3). Tuttavia alcune eccezioni vanno fatte, e cioè a favore della tesi di O. Bonnet *Sur la théorie mathématique des cartes géographiques* (Journ. de Math., 17, 1852), delle memorie del Dini *Sopra alcuni punti della teoria delle superficie* (Mem. Soc. XL, III, 2, 1869) e *Sulla rappresentazione geografica di una superficie su di un'altra* (Ann. di Mat., II, 7, 1877), del *Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques* (Nouv. Ann., II, 17-19, 1877-79) del Tissot, ed ancora dell'articolo di A. Korkine, *Sur les cartes géographiques* (Math. Ann., 35, 1890), lavori che sono degni della massima considerazione anche da parte del matematico puro.

Altrettanto, anzi con maggior ragione, si può ripetere della celebre *Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird* (Astronomische Nachrichten, 3, 1825) (4) dovuta a Gauss e premiata dall'Accademia delle

---

(1) Cfr. Wright, *The Correction of Certain Errors in Navigation* (London, 1599).

(2) Queste memorie di Lambert e Lagrange, assieme a quelle di Gauss che citeremo fra un momento, furono di recente raccolte e ripubblicate dal Wangerin in " Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften ", 54 e 55 (Leipzig, 1894).

(3) Fiorini, *Le projezioni delle carte geografiche* (Bologna, 1884); Zoppritz, *Leitfaden der Kartenwurfslehre* (Leipzig, 1884); Herz, *Lehrbuch der Kartenprojectione* (Leipzig, 1885).

(4) Cfr.: Liouville, nota 5ª a Monge; Jacobi, *Ueber die Abbildung eines ungleichaxigen Ellipsoids auf eine Ebene, bei welcher die kleinsten Theilen ähn-*

Scienze di Kopenhagen. Il Beltrami, oltre al pubblicare una traduzione italiana di questa memoria (Ann. di Mat., 4, 1862), ha risolto elegantissimamente (in una memoria che citammo a pag. 179) un problema analogo a quello ivi trattato, quello cioè della rappresentazione di una superficie su un piano, per modo che alle geodetiche corrispondano delle rette. La questione più generale ed importantissima di rappresentare, quando è possibile, una superficie su un'altra per modo che le geodetiche si corrispondano fra loro, fu risolta dal Dini nella memoria *Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un'altra* (Ann. di Mat., II, 3, 1870).

Della rappresentazione sferica di Gauss (e Rodrigues) parlammo altrove (Cap. V, n. 8) (1); qui aggiungiamo che essa venne generalizzata da Steiner nello scritto *Ueber Lehrsätze von welchen die bekannten Sätze über Parallelcurven besondere Fälle sind* (Journ. f. Math., 22, 1846). Tale lavoro presenta delle analogie con quello *Ueber eine Erweiterung des Begriffs von Parallelflächen* (Götting. Nachr., 1873) in cui l'Enneper si occupò della corrispondenza fra due superficie tale che in punti omologhi le normali siano parallele e che le linee di curvatura si corrispondano; del resto le corrispondenze dotate di tale proprietà erano state considerate prima da O. Bonnet (*Note sur un genre particulier de surfaces réciproques,* C. R., 42, 1856), e lo furono poi dal Darboux (*Sur les modes de transformations qui conservent les lignes de courbure,* C. R., 92, 1881). Di altre somiglianti trasformazioni, l' Enneper stesso trattò più tardi nel lavoro intitolato *Bemerkungen über einige Transformationen von Flächen* (Götting. Nachr., 1877 e 1881; Math. Ann., 21, 1883). Delle " superficie reciproche " di Monge ci dispensiamo dal fare speciale menzione, non tanto perchè le sue ricerche in propo-

---

lich bleiben (Journ. f. Math., 59, 1861); Hoppe, *Abbildung der Flächen zweiten Grades nach Aehnlichkeit der Flächenelemente* (Math. Ann., 2, 1870), e *Ein Theorem über conforme Abbildung der Flächen auf Ebenen* (Arch. der Math., 59, 1878); Craig, *Orthomorphic Projection of an Ellipsoid upon a Sphere* (Am. Journ., 3, 1882); Marcolongo, *Sulla rappresentazione conforme della pseudosfera e sue applicazioni* (Napoli Rend., II, 2, 1888).

(1) Oltre le memorie ivi citate, si veda: A. Razzaboni, *Sulla rappresentazione di una superficie su di un'altra al modo di Gauss* (Giorn. di Mat., 27, 1889).

sito non furono pubblicate per esteso, quanto perchè — lo dimostrò Chasles nella nota 30ª dell'*Aperçu historique* — la relazione che passa fra due tali superficie altro non è che una speciale polarità rispetto ad una quàdrica.

Finiremo coll'additare, come collegate alle precedenti, le *Recherches des surfaces que l'on peut représenter sur un plan* (Ann. di Mat., II, 7, 1875) di O. Bonnet, la memoria del Bäcklund, *Zur Theorie der Flächenstrasformationen* (Math. Ann., 19, 1882), e quella del Voss, *Ueber ein Princip der Abbildung krummer Oberflächen* (Ivi).

9. Le rappresentazioni della seconda delle categorie indicate nell'esordio nel n. 7 si può ritenere abbiano avuto per prototipo la proiezione stereografica, la quale fu il germe del metodo per studiare la geometria sopra una quàdrica proposto dal Clifford (*Geometry on an Ellipsoid,* Proc. L. M. S., 4, 1872). Di natura differente son quelli suggeriti per conseguire lo stesso scopo da Plücker in due scritti sopra *Die analytische Geometrie der Curven auf den Flächen zweiter Ordnung und Classe* (Journ. f. Math., 34, 1847), da Chasles nella sua *Théorie analytique des courbes à double courbure de tous les ordres tracées sur l'hyperboloïde à une nappe* (C. R., 53, 1861) e da Cayley nell'articolo *On the Curves situate on a Surface of the Second Order,* (Phil. Mag., 22, 1861), metodi che, col loro valore, spinsero i geometri a procurarsene degli analoghi per lo studio della geometria su una superficie cubica; che tale ricerca non sia rimasta infruttuosa, si apprende da alcune memorie di Clebsch (*Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung,* Journ. f. Math., 65, 1866, e *Ueber die ebene Abbildung einer Fläche dritter Ordnung,* Math. Ann., 5, 1872) (1) e Cremona (*Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre,* Journ. f. Math., 68, 1868).

Risultati analoghi si ottennero in seguito per molte altre superficie, quali sarebbero le rigate di terzo grado (Clebsch, *Bemerkung über die Geometrie auf den windschiefen Flächen dritter*

(1) Cfr.: Diekmann, *Ueber die Modificationen welche die ebene Abbildung einer Fläche 3ter Ordnung durch Auftreten von Singularitäten erhält* (Math. Ann., 4, 1871), e Korndörfer, *Die Abbildung einer Fläche dritter Ordnung mit einem oder mehreren Knotenpunkten auf eine Ebene* (Neumünster, 1871).

Ordnung, Math. Ann., 1, 1869) (1), la superficie di Steiner (2), e le superficie del quarto ordine con una linea doppia del secondo (Clebsch, *Ueber die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen,* Journ. f. Math., 69, 1868) (3).

Il Clebsch, che più di qualunque altro si mostrò fecondo nell'immaginare dei procedimenti per rappresentare su un piano delle superficie particolari, è anche il primo che si provò a costruire una teoria generale di tali rappresentazioni; egli espose i risultati delle proprie ricerche nell'importante memoria *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung* (Math. Ann., 1, 1869); di più egli fece vedere, nel lavoro *Ueber den Zusammenhang einer Classe von Flächenabbildungen mit der Zweitheilung der Abel'schen Functionen* (Math. Ann., III, 1871), come in moltissimi casi fosse utile cominciare dal rappresentare una superficie sopra un piano doppio, e trasformare poi questo, quando è possibile, in uno semplice (4). Ricerche per generalità analoghe a quelle di Clebsch si leggono nell'articolo di Cayley *On the Transformation of Unicursal Surfaces* (Ivi), nella *Note über die Gleichungen der auf einer Ebene abbildbaren Flächen* (Id., 5, 1872) di A. Brill e nell'importante memoria del Caporali *Sui sistemi triplamente infiniti di curve piane algebriche* (Coll. math., 1881).

Una considerevole generalità hanno pure le investigazioni concernenti rappresentazione delle rigate razionali condotte a buon termine, indipendentemente l'uno dall'altro, dall'Armenante (*Intorno alla rappresentazione delle superficie gobbe di genere* $p=0$ *sopra un piano,* Ann. di Mat., II, 4, 1870) e dal Clebsch (*Ueber*

(1) V. anche la memoria di B. Klein nominata a p. 105.

(2) V. gli scritti di Cremona e di Clebsch citati a p. 110, nota seconda.

(3) A tale scritto di Clebsch servono di complemento i seguenti del Korndörfer: *Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades und einem oder mehreren Doppelpunkten* (Math. Ann., 1, 1869, e 2, 1870), *Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit zwei sich schneidenden Doppelgeraden* (Id., 3, 1871), e *Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades, welche aus zwei sich schneidenden unendlich nahen Geraden besteht* (Id., 4, 1871).

(4) Il germe di quest'idea — alla quale deve la propria esistenza la teoria delle trasformazioni doppie fra due piani, su cui c'intrattenemmo nel n. 6 — esiste probabilmente nella generalizzazione della projezione stereografica che Chasles espose nella Nota 28ª dell'*Aperçu historique.*

di geradlinigen Flächen vom Geschlechte $p = 0$, Math. Ann., 5, 1872), le quali furono precedute dalle analoghe del Cremona sulle rigate di grado $m+n$ dotate di una direttrice m—pla e di una n—pla (*Rappresentazione di una classe di superficie gobbe sopra un piano e determinazione delle loro curve assintotiche* (1), Ann. di Mat., II, 1, 1868) (2).

Ancora più generali e dotate di eccezionale importanza sono le indagini del Nöther *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen* (Math. Ann., 3, 1870), le quali, fra l'altro, condussero a concludere la razionalità di ogni superficie che contenga una schiera razionale semplicemente infinita di curve razionali e servirono di modello a innumerevoli ricerche congeneri.

Vanno ancora ricordati qui l'articolo del Tognoli sopra la *Rappresentazione piana di una classe di superficie algebriche dotate di curve multiple* (Giorn. di Mat., 14, 1876) e la tesi del Lazzeri *Sulla rappresentazione piana delle superficie sviluppabili razionali* (Pisa Ann., 3, 1883), perchè entrambi questi lavori si riferiscono a superficie speciali, ma di ordine qualsivoglia. Invece alla rappresentazione su un piano di superficie di ordine determinato sono consacrate le memorie seguenti: Clebsch, *Ueber die ebene Abbildung der geradlinigen Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve dritten Grades haben* (Math. Ann., 2, 1870), e *Ueber die Abbildung einer Classe von Flächen des fünften Ordnung* (Götting. Abh., 15, 1870) (3); F. Klein, *Ueber die Abbildung der Complexflächen vierter Ordnung und vierter Klasse* (Math. Ann., 2, 1870); Cremona, *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen* (Id., 4, 1871), *Rappresentazione piana di alcune superficie algebriche dotate di curve cuspidali* (Bologna Mem., III, 2, 1872), e *An Exemple of the Method of Deducing a Surface from a Plane Figure* (Trans. of the R. Soc. of Edin-

---

(1) Queste assintotiche sono curve d'ordine $2(m+n-1)$, di cui l'Halphen diede più tardi una notevole costruzione nella nota *Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches douées de deux directrices rectilignes* (Bull. S. M. F., 5, 1877).

(2) Cfr. Guccia, *Sur une classe de surfaces représentables point par point sur un plan* (Ass. fr., 1880).

(3) Le superficie ivi studiate hanno per curva doppia una quartica gobba di 1ª specie.

burgh, 32, 1885); Frahm, *Ueber die Abbildung einer gewissen Fläche vierter Ordnung* (Math. Ann., 7, 1874); Laguerre, *Sur la représentation sur un plan de la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner* (Bull. S. M. F., 1, 1875); Caporali, *Sulla superficie del quinto ordine dotata d'una curva doppia del quinto ordine* (Ann. di Mat., II, 7, 1875) (1).

Una questione importante presentasi spontanea nello studio della rappresentazione delle superficie le une sulle altre, quella cioè se tutte siano riferibili punto per punto un piano, o più generalmente se due superficie qualunque si possano far corrispondere punto per punto. E poichè non è difficile persuadersi che tale domanda esige risposta negativa, così si è condotti all'altra questione: Quali sono le superficie che si possono rappresentare univocamente sopra una data? La questione analoga per le curve piane fu risolta considerando i generi ed i moduli; quella per le superficie servì di stimolo alle ricerche sopra i numeri analoghi per una superficie delle quali parlammo nel n. 3 del III Cap. (2).

10. L'ultima delle generalizzazioni delle trasformazioni cremoniane a cui accennammo nell'introduzione del n. 7, somministra la " teoria delle trasformazioni razionali dello spazio ".

Alcuni esempi semplici di tali corrispondenze sono offerti dalla omologia nello spazio di Poncelet, dall'omografia in generale e dalla trasformazione per raggi vettori reciproci (3). Un

---

(1) Cfr.: Darboux, *Sur une surface de 5ième ordre et sa représentation sur le plan* (Bull. Sc. math., 2, 1871).

(2) Aggiungiamo che di una rappresentazione di una superficie su un'altra tratta la nota di H. Krey, *Ueber einen besonderen Fall des eindeutigen Entsprechens der Punkte zweier Flächen* (Math. Ann., 18, 1881).

(3) È questa l'unica trasformazione dello spazio che condivide con la similitudine la proprietà di conservare gli angoli: lo fece vedere Liouville nella VI delle sue note a Monge; tale importante proprietà si trova poi ridimostrata nei seguenti articoli: Maxwell, *On the Condition that in the Transformation of any Figure by Curvilinear Coordinates in three Dimensions every Angle in the New Figure shall be Equal to the Corresponding Angle in the Original Figure* (Proc. L. M. S., 4, 1872); Bianchi, *Sulla trasformazione per raggi vettori reciproci nel piano e nello spazio* (Giorn. di Mat., 17, 1879); Capelli, *Sulla limitata possibilità di trasformazioni conformi dello spazio* (Ann. di Mat., II, 14, 1886). La similitudine invece è l'unica rappre-

esempio più complicato è offerto dalla trasformazione che nasce associando ad ogni punto dello spazio l'intersezione dei piani che gli corrispondono in tre date polarità od in tre date correlazioni: tale corrispondenza, che in un certo senso è analoga alla corrispondenza quadratica fra due piani, fu studiata, indipendentemente gli uni dagli altri, dal Magnus (*Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Raumes,* Berlin, 1837, p. 403 e seg.), da Hesse nella già citata memoria (v. pag. 70) del Journ. f. Math., 49, 1855, e da Cremona nella sua memoria sulle superficie cubiche (v. pag. 100).

Ma la teoria generale, benchè intuita e direi quasi abbozzata dal Magnus fin dal 1837 (v. op. cit.), non sorse che verso il 1870 e vide la luce per opera di tre grandi geometri lavoranti ciascuno per propria iniziativa; sono Cayley, Cremona e Nöther; e gli scritti donde meglio si apprendono le loro ricerche sono rispettivamente: *On the Rational Transformation between Two Spaces* (Proc. L. M. S., 3, 1869-1871); *Sulle trasformazioni razionali dello spazio* (Ann. di Mat., II, 5, 1872) (1); *Ueber die eindeutigen Raumtransformationen insbesondere in ihrer Anwendung auf die Abbildung algebraischer Flächen* (Math. Ann., 4, 1871). Di questi lavori il più importante è indubbiamente quello dovuto alla penna del nostro celebre connazionale. Egli, guidato dall'analogia che presenta la teoria che ci occupa con quella delle corrispondenze univoche fra due piani, mostrò come

---

sentazione che conservi le aree delle superficie; lo assodò A. Razzaboni nella nota *Sulle rappresentazioni dello spazio sopra sè stesso che conservano le aree delle superficie corrispondenti* (Bologna Rend., 1889-90).

Che il prodotto di quante si vogliano inversioni sia un'inversione dimostrò geometricamente il Mannheim nella nota intitolata *Démonstration géométrique d'une propriété de la transformation par rayons vecteurs réciproques* (Journ. de Math., II, 16, 1871). Quali le modificazioni subiscano per un'inversione le caratteristiche di una curva gobba si apprende dalla memoria di J. Möller *Ueber die Transformation einer gewundenen Curve durch sphärische Inversion* (Lund Aarsskrift, 18, 1882). Finalmente uno studio metodico delle proprietà metriche della inversione leggesi nella nota del Pirondini *Sulla trasformazione per raggi vettori reciproci* (Giorn. di Mat., 27, 1889).

(1) Questa memoria, sino ad ora sgraziatamente incompleta, fu preceduta da alcune note dallo stesso titolo inserite in Rend. Ist. Lomb., 4, 1871; una traduzione francese di essa si legge in Bull. S. M. F., 7, 1874; come suo complemento si può intendere l'articolo *Sopra una trasformazione birazionale del sesto grado dello spazio a tre dimensioni, la cui inversa è del quinto grado* (Proc. L. M. S., 15, 1884).

essa equivalga in ultima analisi allo studio dei sistemi „omaloidici „ di superficie, cioè di quei sistemi lineari triplicemente infiniti di superficie algebriche razionali aventi un solo punto mobile d'intersezione. Inoltre egli insegnò un metodo ingegnosissimo per ottenere tutti i sistemi omaloidici di cui fa parte una superficie della quale si conosce una rappresentazione univoca sopra un piano (1). Finalmente con opportuni e molteplici esempî egli dimostrò come la teoria in discorso insegni il modo di rappresentare certe superficie su altre, in particolare sopra il piano. Donde emerge chiaramente come, conoscendo la rappresentazione di una superficie su un piano, si possa ottenere quella di infinite altre, epperò successivamente innumerevoli altre trasformazioni razionali dello spazio.

11. Malgrado il grande valore degli scritti con cui l'Inghilterra, l'Italia e la Germania contribuirono a fondare e svolgere la teoria delle corrispondenze univoche tra due spazî, non si può dire che questa abbia raggiunto quel grado di perfezione che altre conseguirono e a cui essa poteva giustamente aspirare; ciò forse dipende dal fatto che la soluzione delle più ardue e delicate questioni ad essa collegate dipende dalla determinazione della natura e dal numero delle singolarità delle superficie, determinazione che offre delle difficoltà che non furono ancora vinte (2). Da ciò forse la spiegazione del fatto che i geometri posteriori a quelli citati si occuparono più di illustrare i metodi dei grandi maestri summentovati che di perfezionarli e completarli (3). Fra le speciali trasformazioni che vennero in conseguenza studiate vanno notate le (monoidali) analoghe di quelle di de Jonquières (v. p. 233), di cui il de Paolis trattò nella memoria

---

(1) Tale metodo si può applicare anche alle trasformazioni razionali di spazî lineari comunque estesi; il che ignoro sia stato notato. Che altri ragionamenti più diretti possano, in casi particolari, condurre agli stessi risultati è chiarito su un esempio dalla nota di G. Loria, *Sulle trasformazioni razionali dello spazio determinate da una superficie generale del terz'ordine* (Torino Atti, 26, 1890).

(2) Fra gli scritti con cui si cercò di sormontarle merita un posto eminente quello del Nöther *Sulle curve multiple di superficie algebriche* (Ann. di Mat., II, 5, 1872).

(3) Fa eccezione la recente scrittura del Schönfliess *Ueber Gruppen von Transformationem des Raumes in sich* (Math. Ann., 34, 1883).

Sopra un sistema omaloidico formato da superficie d'ordine n *con un punto* (n—1)—*plo* (Giorn. di Mat., 13, 1875), alcune involutorie di cui occuparonsi il Martinetti (*Sopra una classe di trasformazioni involutorie dello spazio,* Rend. Ist. Lomb., II, 18, 1885), il de Paolis (*Alcune particolari trasformazioni involutorie dello spazio,* Lincei Rend., IV, 1, 1885), l'Eberhard (*Ueber eine räumlich involutorische Verwandtschaft 7. Grades und ihre Kernfläche 4. Ordnung,* Breslau, 1885), ed il Montesano (*Su alcuni gruppi chiusi di trasformazioni involutorie nel piano e nello spazio,* Atti Ist. Ven., VI, 6, 1888; *Su le trasformazioni involutorie monoidali,* Rend. Ist. Lomb., II, 21, 1888; *Su una classe di trasformazioni involutorie dello spazio; Su le trasformazioni involutorie dello spazio nelle quali ai piani corrispondono superficie di ordine* n *con una retta* (n — 2) *-pla,* Lincei Rend., IV, 5, 1889_2; *Su le trasformazioni involutorie dello spazio che determinano un complesso lineare di rette,* Id., 4, 1888_1; *Su le trasformazioni involutorie dello spazio che determinano un complesso tétraedrale,* Id., 5, 1889_2; *Su una classe di trasformazioni razionali ed involutorie dello spazio, di genere arbitrario* n *e di grado* $2n+1$, Giorn. di Mat., 31, 1893). Additeremo ancora (cfr. p. 233) il *Mémoire sur la classification arguésienne des courbes gauches algébriques ou extension à ces courbes du principe arguésien* (Belgique Bull., II, 46, 1878) del Saltel, nonchè le memorie del Casey *On Cubic Transformations* (Dublin Trans., 1880), dell' Aschieri *Sulle corrispondenze cremoniane nel piano e nello spazio* (Rend. Ist. Lomb., II, 14, 1881), di F. von Krieg, *Ueber die eindeutige Beziehung von Räumen mittelst projectiver Ebenenbüschel und ihre Anwendung auf Constructionsaufgaben* (Zeitschr. f. Math., 29, 1884), e dell'Ascione *Studio di una trasformazione* (3,3) (Giorn. di Mat., 31, 1893), di cui le tre ultime, in forza dei temi che trattano, hanno molti punti di contatto.

L'innumerevole varietà di forme speciali di cui sono suscettibili le trasformazioni razionali dello spazio rende desiderabile di classificarle. Un criterio di classificazione si ottiene osservando che in una tale trasformazione alle rette dell'uno spazio corrispondono delle curve di un certo genere, il quale non si altera scambiando le veci dei due spazi; si è proposto di chiamarlo " genere della trasformazione „ e fu indicato un modo

per determinare tutte le trasformazioni di genere zero (1). Un altro criterio di classificazione emerge dalla considerazione del complesso generato dalle rette congiungenti i punti corrispondenti di due spazî conjettivi in corrispondenza univoca (2); sembra infatti che alcuni preferirebbero collocare in una stessa classe tutte le trasformazioni che dànno luogo al medesimo complesso di rette: ciò appare da alcune memorie già citate (pag. prec.) del Montesano e dalle quattro seguenti del Pieri: *Sulle trasformazioni involutorie dello spazio determinate da un complesso Hirstiano di rette* (Rend. Ist. Lomb., II, 25, 1892) (3), *Sulle trasformazioni razionali dello spazio inerenti a un complesso lineare speciale* (Giorn. di Mat., 31, 1893), *Le trasformazioni razionali dello spazio inerenti ad una conica* (Palermo Rend., 7, 1893), e *Sulle trasformazioni razionali dello spazio che individuano complessi di tangenti* (Giorn. di Mat., 33, 1895). A quali di questi criterî convenga accordare la preferenza, o se convenga usarli promiscuamente, o se sia meglio sceglierne dei nuovi, sono questioni che l'avvenire deciderà.

12. Un primo tentativo di una teoria delle trasformazioni $(1, n)$ dello spazio venne fatto dal Tognoli nella memoria *Sulle corrispondenze multiple fra due spazii a tre dimensioni* (Giorn. di Mat., 10, 1872), generalizzando allo spazio le considerazioni di Chr. Wiener che citammo precedentemente (n. 6) (4). Un altro fu fatto dal Reye nell'articolo intitolato *Ueber Coordinaten-Transformationen n^{ten} Grades* (Journ. f. Math., 94, 1883). D'altronde l'Aschieri nella memoria sopra *La trasformazione quadratica doppia di spazio e la sua applicazione alla geometria dello spazio non-Euclideo* (Rend. Ist. Lomb., II, 14, 1881, e 15, 1882) estendeva allo spazio una trasformazione piana doppia considerata dal de Paolis (v. p. 241), ed il Segre, in un articolo citato a p. 116, esponeva delle assai notevoli applicazioni di una

(1) G. Loria, *Sulla classificazione delle trasformazioni razionali dello spazio, in particolare sulle trasformazioni di genere* 0 (Rend. Ist. Lomb., II, 23, 1890).

(2) Cfr. M. Pannelli, *Sui complessi associati ad ogni trasformazione birazionale dello spazio* (Giorn. di Mat., 28, 1890).

(3) È *Hirstiano* un complesso generabile nel modo indicato da Hirst nella memoria menzionata a p. 225.

(4) Altrettanto fece molto tempo dopo il Pannelli nell'articolo *Sulle trasformazioni multiple involutorie di due spazii* (Napoli Rend., II, 1, 1887).

certa trasformazione doppia tra due forme di terza specie. Ma la teoria generale delle trasformazioni doppie dello spazio, è dovuta, come l'analoga del piano, al de Paolis, il quale ne fece conoscere i concetti e le proposizioni più cospicue nella fondamentale memoria sopra *Le trasformazioni doppie dello spazio* (Lincei Mem., IV, 1, 1885). Un'applicazione dei metodi ivi insegnati fu fatta dallo stesso de Paolis in una nota da noi già ricordata (p. 113), una seconda dal Pieri nel lavoro *Sulle tangenti triple di alcune superficie del sest'ordine* (Torino Atti, 24, 1889). Altre non dubitiamo seguiranno, e le auguriamo numerose ed importanti, perchè servano di stimolo alla costruzione della teoria delle trasformazioni multiple $(1, n)$ fra due spazî (1) e di quelle più generali (m, n), entrambe riserbate ai futuri geometri: intanto ci piace rilevare che alcuni casi particolari sono considerati nel lavoro di C. Steinmetz *Ueber die durch ein lineares Flächensystem n^{ter} Ordnung definirten mehrdeutigen involutorischen Raumverwandtschaften* (Zeitschr. f. Math., 35, 1890).

13. Quando si hanno due spazî in corrispondenza univoca qualunque e si considera la figura correlativa dell'uno, si arriva ad una relazione fra punti e piani che include come suo caso particolarissimo l'ordinaria correlazione fra due spazî. Se in particolare i due spazî sono conjettivi e due elementi corrispondenti qualunque sono in posizione unita, si ha una relazione geometrica più generale della correlazione nulla fra due spazî; questi, considerati assieme, formano allora un " sistema nullo d'ordine superiore ". A tali figure accennò in un certo modo il Reye nell'articolo *Ueber die reciproke Verwandtschaft von* F^2*—Systeme und* Φ^2*—Gewebe und die quadratische* F^2*—Systeme achter Stufe* (Journ. f. Math., 82, 1877); ma, nel caso in cui la corrispondenza sia quadratica (2), essi furono studiati metodicamente per la prima volta dall' Ameseder, nelle due memorie *Ueber ein Nullsystem zweiten Grades* (Wiener Ber., 83, 1881) e *Das allgemeine räumliche Nullsystem zweiten Grades*

(1) Cfr. Aschieri, *Del legame fra la teoria dei complessi di rette e quella delle corrispondenze univoche e multiple dello spazio* (Rend. Ist. Lomb., II, 21, 1888).

(2) Cioè tale che ai piani di una stella corrispondano i punti di una quàdrica.

(Journ. f. Math., 97, 1884) (1). Riguardo a tali corrispondenze citeremo anche le memorie seguenti: R. Sturm, *Ueber die reciproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften* (Math. Ann., 19, 1882), e *Ueber höhere raumliche Nullsysteme* (Id., 28, 1887); Voss, *Zur Theorie der allgemeinen Punkt-Ebenen-Systeme* (Id., 23, 1884), e *Theorie der rationalen algebraischen Punkt-Ebenen-Systeme* (Ivi); Lazzeri, *Sulle reciprocità birazionali nello spazio* (Lincei Rend., IV, 2, 1886_2); Montesano, *Sulle reciprocità birazionali dello spazio* (Id., IV, 4, 1888_1).

Finiremo col rilevare come, generalizzando il concetto di corrispondenza, si possa considerare una relazione fra r figure dello stesso numero di dimensioni tale che, scelto ad arbitrio un elemento in $r-1$ fra esse, resti determinato un elemento od un gruppo di m_i elementi nella rimanente. Tale corrispondenza, che col de Paolis (2) si può indicare col simbolo $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$, venne studiata nel caso di $r=3$, $m_1=m_2=m_3=1$, e, supponendo che le figure in corrispondenza siano forme fondamentali di prima specie, anzitutto da F. August, il quale la chiamò relazione " duploprojettiva „ (3) e l'applicò a generare le superficie cubiche (v. lo scritto menzionato a p. 100), poi nei seguenti lavori: Rosanes, *Ueber linear-abhängige Punktsysteme* (Journ. f. Math., 88, 1860); Schubert, *Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilde* (Math. Ann., 17, 1880, e Hamburger Mitth., 1881); Castelnuovo, *Studio sulla omografia di seconda specie* (Atti Ist. Ven., VI, 5, 1887); F. Deruyts, *Sur la représentation de l'homographie de seconde espèce sur la cubique gauche* (Ann. de la Soc. Sc. de Bruxelles, II, 17, 1889); F. Aschieri, *Sulle omografie di 2ª specie* (Rend. Ist. Lomb., II, 28, 1890); B. Klein, *Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde* (Marburg, 1881, e *Theorie der Elemententripel einstufiger Elementargebilde*, Ann. di Mat., II, 18, 1890, e 19, 1891); London, *Zur Theorie der trilineare Verwandtschaft dreier einstufigen Grundgebilde* (Math. Ann., 44, 1894) (4). Contemporanei circa ai lavori dello

---

(1) Cfr. H. Oppenheimer, ***Anwendungen des Ameseder'schen Nullsystems*** (Diss. Jena, 1892; oppure Arch. der Math., II, 13, 1894).

(2) V. l'articolo *Sulle corrispondenze* [m_1, m_2, ..., m_r] *continue che si possono stabilire tra i punti di* r *gruppi* (Ann. di Mat., II, 18, 1890).

(3) Oggi si preferisce chiamarla " trilineare „, perchè è rappresentata da un'equazione lineare fra tre serie di variabili.

(4) Aggiungiamo che sulla corrispondenza trilineare si basa una notevole

Schubert sulla corrispondenza trilineare sono quelli del Le Paige intitolati: *Essais de géométrie supérieure du troisième ordre* (Liège Mem., II, 10, 1883, e Belgique Bull., III, 5, 1883), *Note sur l'homographie du troisième ordre* (Ivi), e *Ueber eine Eigenschaft der Oberflächen zweiter Ordnung* (Wiener Ber., 87, 1883); essi porgono delle notevoli applicazioni della teoria delle forme algebriche. Altrettanto può ripetersi di quelli del medesimo autore in cui è studiata ed applicata l'analoga corrispondenza " quadrilineare „ e che sono: *Sur la forme quadrilinéaire* (Torino Atti, 17, 1882); *Sur la génération de certaines surfaces par des faisceaux quadrilinéaires* (Belgique Bull., III, 8, 1884); *Sur la forme quadrilinéaire et les surfaces du troisième ordre* (Ivi); *Nouvelles recherches sur les surfaces du troisième ordre* (Acta, 5, 1884). Delle corrispondenze analoghe fra un numero qualunque di forme di prima specie tratta il *Mémoire sur la théorie de l'involution et de l'homographie unicursale* (Bruxelles, 1891) di F. Deruyts. Invece la corrispondenza [1, 1, 1] nel caso di forme di seconda specie è studiata nelle due notevoli memorie dell'Hauck *Neue Construction der Perspective und Photogrammetrie* (Journ. f. Math., 95, 1883), e *Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme* (Id., 97, 1884, 98, 1885, 108, 1891, e 111, 1893 (1)), dalle quali risulta che tale corrispondenza è importante nelle applicazioni della geometria alle arti del disegno.

Si aggiunga che la geometria projettiva degli spazî lineari qualunque, la quale verrà descritta nel Cap. XI dell'opera presente, venne applicata con ottimi risultati allo studio di certe particolari corrispondenze; ciò emerge dai seguenti scritti: Castelnuovo, *Studio dell'involuzione generale sulle curve razionali mediante la loro curva normale* (Atti Ist. Ven., VI, 4, 1886), e *Studii sulla teoria della involuzione nel piano* (Ivi); F. Deruyts, *Sur la représentation des involutions unicursales* (Belgique Bull., III, 14, 1887) e *Sur la théorie de l'involution* (Ivi).

Finalmente noteremo (*last but not least!*) come tutte le trasformazioni considerate cambino due figure (curve o superficie) fra

---

generalizzazione ideata da A. Petot pel teorema di Pascal, ed esposta nella nota *Sur une extension du théorème de Pascal aux surfaces du troisième ordre* (C. R., 102, 1886).

(1) V. anche: T. Schmid, *Ueber trilinear verwandte Felder als Raumbilder* (Monatshefte, 6, 1895).

loro tangenti in altre due pure tangenti: donde l'origine del concetto di trasformazione godente tale prerogativa, della " teoria delle trasformazioni di contatto ", che assieme a quella dei gruppi di trasformazioni forma quel campo d'indagini che il Lie ha aperto e così sapientemente coltivato e che a noi sembra rappresentare il più memorabile progresso che la matematica nel suo complesso abbia fatto in questo scorcio di secolo (1).

Se si volge uno sguardo a quanto esponemmo nelle pagine precedenti, si vedrà come il tema trattato in questo Cap. abbia trovato numerosi e significanti cultori (2). La ragione di tal fatto risiede nell'essere generale convincimento che, per quanto lo studio diretto di una figura sia per fermo preferibile a quello di una sua trasformata, pure, nello stato attuale della scienza, poche teorie sarebbero, quanto quella delle trasformazioni geometriche, meritevoli di essere rese perfette in tutti i loro più minuti particolari. Infatti, per dirla con le parole di un grande, " en réfléchissant aux procédés de l'Algèbre, et en recherchant la cause des avantages immenses qu'elle apporte dans la Géométrie, ne s'aperçoit-on pas qu'elle doit une partie de ces avantages à la facilité des transformations que l'on fait subir aux expressions qu'on y introduit d'abord? transformations dont le secret et le mécanisme font la véritable science, et l'objet constant des recherches de l'analyste. N'était-il pas naturel de chercher à introduir pareillement, dans la Géométrie pure, des transformations analogues, portant directement sur les figures proposées et sûr leurs propriétés? " (3).

---

(1) Di tali teorie, di cui già citammo alcune applicazioni, è agevole prender notizia grazie alla grande opera *Theorie der Transformationsgruppen* che, colla collaborazione di F. Engel, il Lie ha pubblicato (Leipzig, 1888, 1890, 1893). È poi annunciata come prossima un'opera di Lie e Scheffers dedicata esclusivamente alla *Geometrie der Berührungstransformationen*.

(2) Ai quali fa d'uopo unire coloro che studiarono la rappresentazione del complesso lineare di rette sullo spazio punteggiato (v. pp. 213 e 214) e dello spazio rigato sullo spazio lineare a quattro dimensioni (p. 214).

(3) Chasles, *Aperçu historique*, 2ª ed., p. 196.

CAPITOLO IX.

Geometria numerativa.

1. Il problema che la Geometria numerativa si propone di sciogliere concepito nella sua forma più generale, si enuncia così: Determinare fra gli ∞^r enti di data definizione, il numero di quelli che soddisfanno a un numero di condizioni equivalenti ad r condizioni semplici (1). Tradotta in linguaggio algebrico, questa questione si trasforma nella ricerca del numero delle soluzioni finite di un sistema di equazioni dotate di singolarità qualunque; si riduce cioè a quella che ragionevolmente si può ritenere essere la questione fondamentale della teoria dell'eliminazione algebrica (2); ciò è sufficiente a mostrare quale importanza possieda.

È impossibile assegnare l'epoca in cui fece la sua apparizione questo ramo interessantissimo della scienza dell'estensione; infatti il giorno in cui un geometra, giunto in possesso di un metodo per costruire una figura soddisfacente a certe condizioni, intraprese la discussione della soluzione ideata per riconoscere, non soltanto come dovevano essere disposti i dati affinchè quella costruzione fosse effettivamente eseguibile, ma anche per stabilire quante di quelle figure verificassero le condizioni imposte; in quel giorno fu studiato un problema di Geometria numerativa. Però la disciplina che porta oggi questo nome differisce dagli studî a cui testè alludemmo perchè si propone di determinare il numero delle soluzioni di una questione senza averla sciolta, spesso anzi ignorando il modo di risolverla. Ad essa soltanto è consacrato il presente Cap., il

(1) Nella Geometria numerativa si *contano*, non si *descrivono a parte*, le soluzioni; si *numerano*, non si *enumerano:* donde la ragione per cui noi non approviamo, epperò non adottiamo, il nome di Geometria enumerativa da molti prescelto.

(2) Gli è perciò che la nota del Krey *Ueber Systeme von Gleichungen mit gewissen Besonderheiten* (Math. Ann., 19, 1882) è di pertinenza della Geometria numerativa.

quale porge dei complementi a quanto esponemmo in quelli che portano i numeri II, III, IV e VII. Prima di entrare in argomento, osserviamo che la materia del Cap. medesimo non è determinata senza incertezza, sicchè in esso avremmo potuto, ad esempio, far entrare le indagini intorno alle singolarità di curve di superficie e di complessi di rette, nonchè altre congeneri; se opportunamente pensammo di non farlo, giudichi il lettore.

2. Fra le moltissime proposizioni di cui Steiner ci lasciò gli enunciati, parecchie entrano nel dominio della Geometria numerativa. Tali sono quelle che assegnano il numero delle coniche le quali passano pei tre punti dati di una cubica piana e la osculano altrove (*Sätze über Curven zweiter und dritter Ordnung,* Journ. f. Math., 32, 1846), e il numero di quelle quadritangenti a una quartica piana od aventi assegnate relazioni di contatto con curve date (*Aufgaben und Lehrsätze,* Id., 45, 1853, e 49, 1855); tali sono, ancora meno discutibilmente, quelle donde si apprende quante siano le coniche che toccano 5, 4 o 3 coniche date e passano rispettivamente per 0, 1 o 2 punti dati (*Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe und über einige damit in Beziehung stehende Eigenschaften der Kegelschnitte,* Id., 37, 1848), e quante quelle di cui si conoscono p punti, t tangenti e n normali, ove $p+t+n=5$ (*Vermischte Sätze und Aufgaben,* Id., 55, 1858) (1); tali da ultimo quelle che insegnano quante siano le cubiche di un dato piano che soddisfanno a certe condizioni (*Aufgaben und Lehrsätze,* Id., 45, 1853). Aggiungeremmo ancora gli scritti di Steiner e de' suoi numerosi commentatori intorno alle curve dotate di centro e alle normali a curve e superficie algebriche, se non ne avessimo discorso altrove (v. Cap. II, n. 2, e Cap. III, n. 5).

Siccome non ci è nota la via che seguì Steiner per giungere alle ora ricordate verità, così si può dire che egli appartenga al periodo di preparazione (sarebbe dir troppo asserendo che egli lo segni); è lecito anche affermare che i suoi studî contribuirono

---

(1) I numeri trovati da Steiner non sono tutti esatti; le relative modificazioni si leggono nella nota di A. Wiman *Ueber die Anzahl des Kegelschnitte, welche durch Punkte, Tangenten und Normalen bestimmt sind* (Zeitschr. f. Math., 40, 1895), ove sono anche risolti i problemi analoghi per la parabola.

indirettamente ma efficacissimamente, alla costituzione della Geometria numerativa, in quanto stimolarono molti geometri a creare dei metodi di giustificazione per quanto egli aveva asserito. Fra tali scienziati va anzitutto ricordato il Bischoff grazie alla nota intitolata *Einige Sätze über die Tangenten algebraischer Curven* (Journ. f. Math., 56, 1859), ove l'algebra moderna è sfruttata per dimostrare e completare alcuni dei teoremi summentovati; ivi però il Bischoff, come del resto lo stesso Steiner, incorse in alcuni errori che cinque anni più tardi vennero rilevati e corretti da Chasles (v. pag. seg.); per renderli perfetti, come nota il Cremona (*Einleitung in eine Theorie der ebenen Curven,* Greifswald, 1865, n. 111 *bis*), basta tenere il debito conto delle soluzioni improprie (1). D'altronde i teoremi di cui Steiner diede notizia in Journ. f. Math., 55, si trovano dimostrati nella *Note sur le nombre des coniques qui sont déterminées par cinq conditions, lorsque parmi ces conditions il existe des normales données* (Journ. de Math., II, 4, 1859) del de Jonquières, geometra al quale dobbiamo anche delle *Solutions de quelques questions générales concernant les courbes algébriques planes* (Journ. f. Math., 59, 1861); citiamo qui tale lavoro essendo ivi insegnate delle proposizioni che comprendono alcune di Steiner ed alle quali l'autore pervenne risolvendo in casi speciali il problema generale seguente: " determinare la classe dell'inviluppo di una retta che seca una data curva algebrica in modo che una data funzione algebrica razionale intera delle mutue distanze dei punti d'intersezione abbia un dato valore " (2). Notiamo di passaggio che altri enunciati di Steiner si possono giustificare servendosi di una trasformazione piana quadratica, come ebbe a notare il Berner nella sua pregevole Diss. *De transformatione secundi ordinis ad figuras geometricas adhibita* (Berlin, 1864).

Si può ritenere che l'ultimo geometra appartenente all'ora descritto periodo di preparazione sia il de Jonquières, di cui va ancora menzionata la memoria dal titolo *Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque*

---

(1) Cfr. anche Gundelfinger, *Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn Bischoff über die Tangenten algebraischer Curven im 56. Bande d. J.* (Journ. f. Math., 73, 1871).

(2) Algebricamente questo problema si può sciogliere con facilità in molti casi applicando il notissimo " principio di trasporto " (*Uebertraungsprincip*) di Clebsch.

(Journ. de Math., II, 6, 1861; cfr. Battaglini, *Sulla serie di curve di indice qualunque,* Napoli Atti, 2, 1863), la cui importanza è in gran parte dovuta alla nozione ivi introdotta di " indice di un sistema semplicemente infinito di curve piane "; ma non ci è permesso di tacere che parecchi dei teoremi ivi esposti per raggiungere l'esattezza devono subire delle modificazioni non insignificanti (cfr. de Jonquières, *Note sur les systèmes de courbes et de surfaces,* Journ. de math., II, 10, 1865, e *Théorèmes fondamentaux sur les séries de courbes et de surfaces d'ordre quelconque,* Giorn. di Mat., 4, 1866); la causa di tali imperfezioni sta nel metodo usato dall'egregio geometra, metodo il quale, essendo in sostanza una cieca applicazione del teorema di Bézout, non permette di discernere le soluzioni proprie; e nemmeno è lecito lasciar passare inosservato che egli erroneamente credette alla possibilità di rappresentare in coordinate cartesiane qualunque serie algebrica di curve d'indice m mediante un'equazione della forma $\sum_{r=0}^{r=m} \lambda^{m-r} f_r(x, y) = 0$ (f_r essendo polinomi interi dello stesso grado), sicchè le sue proposizioni non sono applicabili che a serie *razionali.*

3. Il primo periodo di esistenza della Geometria numerativa si può far cominciare dal giorno in cui Chasles intraprese la pubblicazione della lunga serie di memorie con cui egli chiuse gloriosamente la sua luminosa carriera scientifica (1).

Comincia tale serie con la memoria che tratta della *Détermination du nombre des sections coniques qui doivent toucher cinq courbes d'ordres quelconques ou satisfaire à diverses autres conditions* (C. R., 58, 1864), e tende a correggere delle proposizioni inesattamente esposte da Steiner e Bischoff (v. pag. prec.), a sorreggere con inconfutabili dimostrazioni dei teoremi che il de Jonquières aveva dianzi scoperti. Seguono ad essa da presso le due intitolate *Construction des coniques qui satisfont à cinq conditions. Nombre des solutions dans chaque question* (Ivi) e *Systèmes de coniques qui coupent des coniques données, sous des angles donnés, ou sous des angles indéterminés, mais dont les bisectrices ont des directions déterminées* (Ivi), lo scopo delle quali è sufficientemente indicato dal titolo. Del metodo

(1) Cfr. l'articolo bibliografico del Painvin, *Sur la théorie des caractéristiques* (Bull. Sc. math., 3, 1872).

per assodare la verità dei teoremi ivi enunciati, Chasles si occupò in una celebre comunicazione fatta all'Accademia delle Scienze di Parigi il 27 giugno 1864 e pubblicata in C. R., 58, sotto il titolo: *Considérations sur la méthode générale exposée dans la séance du 15 février. Différences entre cette méthode et la méthode analytique. Procédés généraux de démonstration.* Ivi sono fatti notare i servizî che rendono nella geometria numerativa: 1° le " caratteristiche „ μ e ν di un sistema semplicemente infinito di coniche d'un piano (μ numero delle coniche del sistema che passano per un punto arbitrario del piano del sistema, ν numero delle coniche che toccano una retta qualunque del piano stesso), 2° la considerazione delle coniche singolari o degeneri contenute nel sistema considerato, 3° il " principio di corrispondenza „ di cui parleremo nel n. 8. Questo metodo, almeno nella parte che concerne le caratteristiche, è un perfezionamento, che la pratica aveva dimostrato indispensabile, di quello che il de Jonquières aveva eretto sulla nozione di " indice „ (1). Tale perfezionamento — che sembra naturale a chi rifletta non essere la considerazione di due caratteristiche correlative in un sistema che il riflesso del doppio modo di considerare una curva, come luogo di punti e come inviluppo di rette — è così grande che a ragione Chasles, viene considerato per il creatore della teoria delle caratteristiche.

Fedeltà storica impone di ricordare qui una polemica vivace fra Chasles e de Jonquières, a cui diede luogo la teoria delle caratteristiche; non potendo addentrarci nell'esame di essa, ci limitiamo a indicare gli scritti che ne contrassegnano le fasi (2): Chasles, *Observations relatives à la théorie des systèmes de courbes* (C. R., 63, 1866); de Jonquières, *Observations relatives à la théorie des séries ou systèmes de courbes* (Ivi); Chasles, *Observations au sujet de cette communication* e *Addition aux observations présentées dans la dernière séance* (Ivi); de Jonquières, *Recherches sur les séries ou systèmes de courbes et de surfaces algébriques d'ordre quelconque, suivies d'une réponse à quelques critiques de M. Chasles* (Paris, 1866); Chasles, *Réponse à une revendication de priorité*

(1) Infatti l' " indice „ non differisce dalla caratteristica μ di Chasles.
(2) Cfr.: Chasles, *Rapport sur les progrès de la géométrie* (Paris, 1870), p. 330-331.

(Paris, 1867); de Jonquières, *Documents relatifs à une revendication de priorité* (litogr. Paris, 4 fév. 1867); Chasles, *Réponse aux documents relatifs à une revendication de priorité* (Paris, 1867); de Jonquières, *Lettre à M. Chasles sur une question en litige* (Paris, 31 mai 1867).

Dopo di aver esposti i concetti fondamentali del suo metodo, Chasles fece conoscere degli *Exemples des procédés de démonstration annoncés dans la séance précédente 27 juin 1864* (C. R., 59, 1864), che moltiplicò nella *Suite des propriétés relatives aux systèmes de sections coniques* (Ivi) e nelle note seguenti: *Questions dans lesquelles il y a lieu de tenir compte des points singuliers des courbes d'ordre supérieur. Formule générale comprenant la solution de toutes les questions relatives aux sections coniques* (Ivi), *Questions dans lesquelles entrent les conditions multiples, telles que des conditions de double contact ou de contact d'ordre supérieur* (Ivi), *Propriétés de systèmes de coniques, relatives, toutes, à certaines séries de normales en rapport avec d'autres lignes ou divers points* (Id., 72, 1871), *Propriétés des systèmes de coniques, dans lesquelles se trouvent des conditions de perpendicularité entre divers systèmes de droites* (Ivi) e *Théorèmes divers concernant les systèmes de coniques représentés par deux caractéristiques* (Ivi).

4. Gli splendidi risultati ottenuti da Chasles ebbero un'eco in tutto il mondo scientifico; lo provano le numerose pubblicazioni aventi per iscopo di perfezionare i di lui procedimenti, di verificare (1) o di pervenire per altra via alle verità da lui scoperte, di rendere più copiosa la collezione di teoremi di Geometria numerativa: fra essi basterà che ora citiamo, oltre ai brani di lettere di Cremona, Cayley e Hirst inserite in C. R., 64, 1867, alcune note del Cremona (*Sur le nombre de coniques qui satisfont à des conditions doubles,* C. R., 59, 1864), del Cayley (*Sur les coniques déterminées par cinq conditions de contact avec une courbe donnée,* Id., 63, 1866),

(1) P. es. nella Diss. del Tognoli intitolata *Teoremi di Chasles sopra le proprietà dei sistemi di coniche* (μ, ν) *che servono di base alla determinazione del numero di queste curve che soddisfano a cinque condizioni qualunque* (Pisa, 1869), si trovano dimostrati i teoremi che Chasles fece inserire in C. R., 58 e 59.

e di N. Salvatore-Dino (*Sur la théorie des systèmes de coniques*, Id., 65, 1867, e *Alcune applicazioni analitiche del metodo delle caratteristiche,* Napoli Rend., 14, 1875), e poi le importanti memorie dello Zeuthen *Nouvelle méthode pour déterminer les caractéristiques des systèmes de coniques* (Nouv. Ann., II, 5, 1866) (1) e del Cayley, *On the Curves wich satisfy Given Conditions* (Phil. Trans., 158, 1868 (2). Chasles di poi accrebbe notevolmente la portata dei suoi metodi e così potè estendere a sistemi di curve d'ordine qualsivoglia alcune delle ricerche che in origine aveva limitato alle coniche (3). Indagini congeneri vennero condotte a termine dal de Jonquières (4), e da lui estese anche ai sistemi di superficie algebriche (5); a tali investigazioni devono la loro esistenza anche i seguenti lavori del medesimo geometra: *Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque des courbes de degré* r, *qui satisfont à des conditions données, avec une courbe fixe de degré* m (Journ. f. Math., 66, 1866), *Sur les réseaux de courbes et de surfaces algébriques* (Math. Ann., 1, 1869), e *Note sur quelques théorèmes fondamentaux dans la théorie des courbes et des surfaces algébriques* (Ann. di Mat., II, 8, 1877); analoghe a queste sono le questioni risolute nella nota *Détermination de courbes et de*

(1) Originariamente questo lavoro comparve in danese col titolo *Nyt Bidrag til Laeren om Systemer af Keglesnit, der er underkatede 4 Betingelser* (Köjbenhavn, 1865); un sunto se ne legge in C. R., 62, 1866.

(2) Ivi è mostrata l'applicazione delle equazioni funzionali alla risoluzione di problemi di Geometria numerativa.

(3) V. le note, veramente fondamentali, intitolate: *Relations entre les deux caractéristiques d'un système de courbes d'ordre quelconque* (C. R., 62, 1866); *Remarques sur les questions de contact de courbes d'ordre quelconque avec une courbe donnée dont les points se déterminent individuellement* (Id., 63, 1866); *Sur les systèmes de courbes d'ordre quelconque* (Id., 64, 1867).

(4) *Formules exprimant le nombre de courbes d'un même système d'ordre quelconque, qui coupent des courbes données d'ordre également quelconque, sous des angles donnés, ou sous des angles indéterminés mais dont le bissectrices ont des directions données* (C. R., 58, 1864); *Détermination du nombre des courbes d'ordre* r *qui ont un contact d'ordre* $n < mr$ *avec une courbe donnée d'ordre* m, e *Détermination du nombre des courbes du degré* r *qui ont deux contacts, l'un d'ordre* n, *l'autre d'ordre* n' (Id., 63, 1866).

(5) *Propriétés diverses des systèmes de surfaces d'ordre quelconque* (C. R., 58, 1864), e *Sur la détermination des valeurs des caractéristiques dans les séries ou systèmes élémentaires de courbes et de surfaces* (Id., 63, 1866). Cfr. anche le *Recherches* che fanno parte degli scritti polemici contro Chasles che furono citate a pag. 263, nonchè l'*Étude* dello stesso autore *sur les singularités des surfaces algébriques* (Nouv. Ann., II, 3, 1864); inoltre: Cayley, *Notes sur quelques formules de M. E. de Jonquières, relatives aux courbes qui satisfont à des conditions données* (C. R., 63, 1866), e A. Legoux, *Mémoire sur les systèmes de surfaces* (Mém. de l'Acad. de Toulouse, VIII, 9, 1887).

surfaces satisfaisant à des conditions de contact double (C. R., 89, 1879) dello Zeuthen, geometra che alcuni anni prima, in una memoria già citata (pag. 196) (1), aveva esteso il metodo delle caratteristiche dalle coniche alle curve piane d'ordine qualunque.

Osserviamo qui come i lavori del de Jonquières abbiano eccitato parecchi scienziati ad occuparsi delle questioni di Geometria numerativa in cui entrano condizioni di contatto fra curve, fra superficie, fra curve e superficie, il che fornì ad alcuni di essi una propizia occasione per mostrare delle applicazioni dell'analisi più raffinata. Vanno in particolare ricordati i seguenti scritti: A. Brill, *Ueber diejenigen Curven eines Büschels welche eine gegebene Curve zweipunktig berühren* (Math. Ann., 3, 1871), *Ueber zwei Berührungsprobleme* (Id., 4, 1871) e *Ueber Systeme von Curven und Flächen* (Id., 8, 1875); Tognoli, *Nota sul numero delle superficie di una rete, che hanno un contatto tripunto colla curva d'intersezione di due superficie algebriche* (Giorn. di Mat., 9, 1871); Spottiswoode (1825-1883), *On the Contact of Surfacs* (Phil. Trans. 162, 1872), *Sur les surfaces osculatrices* (C. R., 79, 1874), *On the Contact of Quadrics with other Surfaces* (Proc. L. M. S., 5, 1874), *Sur le contact d'une courbe avec un faisceau de courbes doublement infini* (C. R., 88, 1876), *On Multiple Contact of Surfaces* (Quart. Journ., 4, 1876), *On Curves having Four—point Contact with a Triply Infinite Pencil of Curves* (Proc. L. M. S., 8, 1877), *On Hyperjacobian Surfaces and Curves* (Phil. Trans., 167, 1877), e *On the Contact of Conic with Surfaces* (Id., 169, 1879); Clifford, *On Mr. Spottiswoode's Contact Problems* (Id., 164, 1874); Krey, *Ueber dreipunktig berührende Curven einer dreifach unendlichen Schaar* (Math. Ann., 10, 1876); Fouret, *Démonstration par le principe de corréspondance d'un théorème sur le contact des surfaces d'un implexe avec une surface algébrique* (C.R., 84, 1877); Lindemann, *Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini qui touchent une courbe algébrique donnée par un contact du troisième ordre* (Bull. S. M. F., 10, 1882); G. Humbert, *Sur un problème de contact de M. de Jonquières* (Palermo Rend., 4, 1890); Bagnera, *Sul luogo dei contatti tripunti delle curve di un fascio con le curve di una rete*

---

(1) Se ne trova un sunto in Bull. Sc. math., 7, 1874. Cfr. anche Krey. *Ueber Systeme von Plancurven* (Acta, 7, 1885). Assai più ristretto è il campo di azione della *Note sur le nombre des coniques qui touchent en cinq points une courbe du cinquième degré* (Nouv. Ann., II, 5 1866) del Beyer.

(Id. 10, 1896); de Franchis, *Sulla curva luogo dei contatti d'ordine* k *delle curve d'un fascio colle curve d'un sistema lineare* ∞^k (Ivi).

5. Nel frattempo Chasles aveva enunciati molti teoremi intorno ai sistemi semplicemente infiniti di coniche nello spazio (*Systèmes de coniques qui sastisfont à sept conditions dans l'espace,* (C. R., 61, 1865) ed ai sistemi analoghi di quàdriche (*Théorie générale des systèmes de surfaces du second ordre satisfaisant à huit conditions; caractéristiques des systèmes élémentaires* e *Expression générale du nombre des surfaces déterminées par neuf conditions quelconques,* Id., 62, 1866). Di tali proposizioni quelle relative alle coniche (o le loro correlative) furono dimostrate analiticamente e completati dall'Hierholzer (*Ueber Kegelschnitte im Raume,* Math. Ann., 2, 1870), dal Lüroth (*Ueber die Anzahl der Kegelschnitte, welche acht Gerade im Raume schneiden,* Journ. f. Math., 68, 1868, e *Eine Aufgabe über Hegelschnitte im Raume* Math. Ann., 3, 1871), e dal Cayley (*On the Surfaces each the Locus of the Vertex of a Cone which passes through* m *Given Points and touches* 6—m *Given Lines,* Proc. L. M. S., 4, 1873). Agli scritti del citato geometra francese sulle quàdriche si legano i lavori seguenti: Salmon, *On Some Points in the Theory of Elimination* (Quart. Journ., 7, 1866, ove è applicata la considerazione di spazî a più dimensioni); Zeuthen, *Sur la détermination des caractéristiques des surfaces du second ordre* (Nouv. Ann., II, 7, 1868); Darboux, *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre* (C. R., 67, 1868); Schubert, *Zur Theorie der Charakteristiken* (Journ. f. Math., 71, 1870), e *Auszug aus einem Schreiben an den Herausgeber* (Id., 73, 1871 (1); Halphen, *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre* (C. R., 76, 1876), e *Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre* (Bull. S. M. F., 1 e 2, 1873-74). — Della teoria delle caratteristiche pei sistemi di superfieie di 2° ordine venne fatta un'applicazione importante al sistema delle ∞^3 quadriche polari dei punti dello spazio rispetto ad una superficie algebrica qualunque; essa fu indicata dallo Schubert nella nota dal titolo *Geome-*

(1) Di una terza memoria verrà fatto cenno a pag. 279, nota.

trische Bestimmung der zu einer Fläche beliebiger Ordnung gehörigen Hesse'schen Kernflächen (Zeitschr. f. Math., 15, 1870) e completamente svolta dallo Zeuthen nella bella *Note sur les quadriques polaires* (Ann. di Mat., II, 4, 1870-71); è chiaro che quest'applicazione è suscettibile di ulteriori svolgimenti a cui forse varrebbe la pena di dar seguito.

Termineremo questo n. dicendo che la ricerca delle caratteristiche dei sistemi elementari di cubiche piane fu compiuta dallo Zeuthen (*Détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires de cubiques*, C. R., 74, 1872) e quasi contemporaneamente dal Maillard (*Recherche des caractèristiques des systèmes élémentaires de courbes planes du troisième ordre*, Paris, 1871) (1); la ricerca analoga per le quartiche piane è pure dovuta allo Zeuthen (*Résultats d'une recherche des caractéristiques des systèmes élémentaires de quartiques*, C. R., 75, 1872), per le cubiche piane razionali allo Schubert (*Die fundamentalen Anzahlen und Ausartungen der cubischen Plancurven nullten Geschlechtes*, Math. Ann., 13, 1878), e per le cubiche gobbe allo Schubert stesso (v., oltre uno scritto che indicammo a piè della pag. 136, il § 25 dell'opera *Kalkül der abz. Geometrie*, il quale riassume una memoria premiata nel 1875 dall'Accademia di Kopenhagen) e a R. Sturm (*Erzeugnisse, Elementarsysteme und Charakteristiken von kubischen Raumcurven*, Journ. f. Math., 79, 1875; *Weitere Untersuchungen über kubische Raumkurven*, Id., 80, 1875).

6. Di grande importanza per la teoria dei sistemi semplicemente infiniti di curve piane (in particolare per la determinazione delle loro caratteristiche) è il legame che si può stabilire fra essa e la teoria delle equazioni differenziali di primo ordine fra due variabili (2), rappresentando gli integrali di una di tali equazioni mediante un sistema di curve piane. Se μ e ν sono le caratteristiche di un tale sistema, la data equazione differenziale fa corrispondere ad ogni punto μ rette (direzioni) uscenti da esso, ad ogni retta ν punti di essa. A tale corrispondenza fu condotto Clebsch dalle sue ricerche sopra i connessi (v. il n. 7 del Cap. prec.); ma indipendentemente da lui, venne studiata dal

(1) Cfr. Cayley, *Sur les courbes aplaties* (C. R., 74, 1872), e *Sur une certaine surface quartique aplatie* (Ivi).

(2) Si noti che così si toglie la limitazione che le curve siano algebriche.

Fouret in parecchie memorie (1) e quindi da lui estesa allo spazio (2). Fra le applicazioni da questo fatte delle corrispondenze testè indicate noteremo l'estensione a sistemi di curve trascendenti di un teorema di Chasles che indica quante curve di un sistema semplicemente infinito tocchino una data curva algebrica (3), la determinazione dell'ordine del luogo dei punti di contatto delle superficie (algebriche o trascendenti) di un sistema semplicemente infinito colle superficie di un sistema analogo doppiamente infinito, e quella dell'ordine del luogo dei punti di contatto delle superficie (non necessariamente algebriche) di un sistema doppiamente infinito con una superficie algebrica. Malgrado questi buoni risultati ottenuti, il Fouret non sembra avere trovati seguaci, le indagini che egli intraprese non furono (a quanto ci consta) proseguite da altri, nè i metodi che gli sono proprî vennero, per quanto ci consta, ulteriormente sfruttati; perciò noi passeremo ad un altro ordine di idee.

7. Un notevole progresso venne fatto dalla Geometria nume-

---

(1) *Sur les systèmes de courbes planes, algébriques ou transcendantes, définis par deux caractéristiques* (C. R., 78, 1874); *Nombre des points de contact des courbes algébriques ou transcendantes avec une courbe algébrique* (Id., 82, 1876); *Sur quelques propriétés des systèmes de courbes* ($\mu = 1$, $\nu = 1$) (Ivi); *Intégration géométrique de l'équation* $L(x\,dy - y\,dx) - M\,dy + N\,dx = 0$ *dans laquelle* L, M, N *désignent des fonctions linéaires de* x *et* y (Ivi); *Du nombre des branches de courbes d'un système* μ, ν *qui coupent une courbe algébrique donnée sous un angle de grandeur donnée ou dont les bissectrices aient une direction donnée* (Id., 83, 1876); *Sur les points fondamentaux du faisceau des courbes planes défini par une équation différentielle du premier ordre algébrique* (Id., 86, 1878); *Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes algébriques ou transcendantes, définis par deux caractéristiques* (Bull. S. M. F., 2, 1874); *Sur les courbes planes transcendantes susceptibles de faire partie d'un système* (μ, ν) (Ivi).

(2) *Sur certains groupes de surfaces, algébriques ou transcendantes, définis par deux caractéristiques* (C. R., 79, 1874), *Propriétés des implexes de surfaces, définis par deux caractéristiques* (Ivi); *Sur la notion des systèmes généraux de surfaces algébriques ou transcendantes, déduite de la notion des implexes* (Id., 80, 1875); *Sur quelques conséquences d'un théorème général, relatif à un implexe et à un système de surfaces* (Ivi); *Du contact des surfaces d'un implexe avec une surface algébrique* (Id., 82, 1876); *Intégration géométrique de l'équation aux dérivées partielles* $L(px + qy) - Mp - Nq + R = 0$, *dans laquelle* L, M, N *et* R *désignent des fonctions linéaires de* x, y, z (Id., 83, 1876); *Sur les points fondamentaux du réseau de surfaces défini par une équation aux dérivées partielles du premier ordre algébrique, linéaire par rapport à ses dérivées* (Id., 86, 1878).

(3) *Nombre des points de contact des courbes algébriques ou transcendantes avec une courbe algébrique* (Id., 82, 1876).

rativa coll'introduzione di nuovi enti geometrici, oltre alle curve ed alle superficie, ai quali si possono applicare, *mutatis mutandis,* i metodi di Chasles; si può dire che questi stesso lo abbia compiuto colle numerose comunicazioni sulle serie di triangoli da lui fatte all'Accademia delle Scienze di Parigi. L'indole delle questioni da lui trattate risulta dai titoli che qui riferiamo delle sue note sopra tale argomento: *Questions relatives à des séries de triangles semblables assujettis à trois conditions communes* (C. R., 78, 1874), *Détermination du nombre de triangles semblables qui sastisfont à quatre conditions* (Ivi), *Sur les séries de triangles semblables* (Id., 79, 1874), *Nouveaux théorèmes sur les séries de triangles semblables* (Ivi), *Théorèmes relatifs à des séries de triangles de même périmètre satisfaisant à quatre conditions* (Id., 84, 1877), *Théorèmes relatifs à des séries de triangles isopérimètres, qui ont un côté de grandeur constante, et satisfont à trois autres conditions diverses* (Ivi), *Triangles isopérimètres ayant un çôté de longueur constant et satisfaisant à trois autres conditions* (Ivi), *Triangles isopérimètres ayant un côté de grandeur constant et un sommet en un point fixe* (Ivi). — Tema congenere hanno gli importanti lavori del Cayley, *On the Problem of the In—and Circumscribed Triangle* (Phil. Trans., 161, 1871) (1), dello Schubert *Anzahlgeometrische Behandlung des Dreiecks* (Math. Ann., 17, 1880) e, in una certa misura, la Diss. di J. W. Kirchner *Ueber die perspectivische Lage ebener Dreiecke* (Halle, 1888); mentre un primo tentativo di estendere allo spazio le investigazioni di Chasles è rappresentato dall'articolo dell'Hossfeld *Ueber die einer algebraischen Fläche eingeschriebenen regulären Tetraeder mit Berücksichtigung der Flächen zweiter Ordnung* (Zeitschr. f. Math., 29, 1884).

Dello stesso ordine sono gli studî che guidarono l'Hirst ad estendere la teoria delle caratteristiche alle correlazioni piane e solide (*On the Correlations of two Planes,* Ann. di Mat., II, 6, 1875, e 8, 1878; Proc. L. M. S., 5, 1874; *Correlation in Space,* Id., 6, 1875; *Note on the Correlation of two Planes,* Id., 8, 1877): studî i quali vennero proseguiti con ottimi risultati dallo Sturm (*Ueber correlative und reciproke Bündel,* Math. Ann., 12, 1877,

---

(1) Questa memoria si riferisce a un triangolo di cui i lati percorrono tre date curve e i lati ne inviluppano tre altre.

e *Ueber die reciproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften,* Id., 19, 1882) e dal Visalli (*Sulle correlazioni in due spazii a tre dimensioni,* Lincei Mem., IV, 3, 1886, *Sulle correlazioni (in due spazii a tre dimensioni) che soddisfano a dodici condizioni,* Lincei Rend., IV, 3, 1887_1, e *Sulle collinearità e correlazioni ordinarie ed eccezionali in due spazii a quattro dimensioni* (Rend. Ist. Lomb., II, 29, 1896); essi sono analoghi a quelli sulla corrispondenza (1, 2) fra due forme fondamentali di prima specie che lo Schubert espose nella memoria *Ueber die ein-zweideutige Beziehung zwischen den Elementen einstufiger Grundgebilde* (Journ. f. Math., 88, 1880).

8. Al ramo di Geometria di cui ci occupiamo appartengono anche gli innumerevoli teoremi a cui Chasles fu condotto applicando il " principio di corrispondenza „ che reca il suo nome (1). Che lo porti con piena giustizia è estremamente discutibile (2); se esso generalmente viene attribuito a Chasles gli è perchè questi, dopo averlo fatto conoscere in due casi speciali relativi a forme elementari di prima specie (*Principe de correspondance entre deux objets variables qui peut être d'un grand usage en géométrie,* C. R., 41, 1855), non solo lo enunciò in tutta la generalità che comporta nella celebre comunicazione (già citata a pag. 263) da lui fatta all'Accademia delle Scienze di Parigi il 27 giugno 1864, ma ne mise in chiaro le doti speciali, in un articolo intitolato appunto *Considérations sur le caractère propre du principe de correspondance* (C. R., 78, 1874); di più egli, assieme a Cayley, ne avvertì l'applicabilità a tutte le forme di prima specie razionali (3). Dilucidazioni ed estensioni del principio di corrispondenza furono somministrate dal Geiser (*Sopra un teorema fondamentale della geometria,* Ann. di Mat., II, 4, 1870-71) e dallo Zeuthen (*Note sur le principe de correspondance,* Bull. Sc. math., 5, 1873), mentre il Saltel suggerì un metodo per distinguere le coincidenze che avvengono a distanza finita dalle altre (*Sur une extension*

(1) È tanto noto che è superfluo il riferirne qui l'enunciato.

(2) V. Segre, *Intorno alla storia del principio di corrispondenza e dei sistemi di curve* (Bibl. math., 1892).

(3) Chasles, *Sur les courbes planes ou à double courbure dont les points se peuvent déterminer individuellement. Application du principe de correspondance dans la théorie de ces courbes* (C. R., 62, 1866), e *Sur les courbes à points multiples, dont tous les points se peuvent déterminer individuellement* (Ivi); Cayley, *Note sur la correspondance de deux points d'une courbe* (Ivi).

analytique du principe de correspondance de M. Chasles, C. R., 80, 1875; v. anche la nota dello stesso *Sur les courbes gauches de genre zéro,* Ivi) e ne fece molteplici ed interessanti applicazioni (1).

La generalizzazione del principio di corrispondenza di Chasles a forme di prima specie non razionali fu ottenuta induttivamente da Cayley (*Note sur la correspondance de deux points sur une courbe,* C. R., 62, 1866; *On the Correspondance of two Points in a Curve,* Proc. L. M. S., 1, 1865-66; *Second Memoir on Curves which satisfy Given Conditions,* Phil. Trans., 158, 1868), il quale però non riuscì a somministrare al suo teorema una dimostrazione rigorosa. Ciò venne fatto da A. Brill (2). Altre dimostrazioni della formola di Cayley-Brill si leggono nella memoria del Küpper *Ueber das verallgemeinerte Correspondenzprinzip* (Wiener Ber., 93, 1886), ed in quella dello Zeuthen *Nouvelle démonstration du principe de correspondance de Cayley et de Brill, et méthode à la détermination des coïncidences de correspondances algébriques sur une courbe d'un genre quelconque* (Math. Ann., 40, 1892). Un importante ampliamento di cui quella formola è suscettibile venne scoperto non ha guari dall' Hurwitz ed esposto nel bellissimo lavoro *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprinzip* (Leipziger Ber., 1886, e Math. Ann., 28, 1887).

Per le forme di seconda e terza specie sussistono dei teoremi analoghi al principio di corrispondenza di Chasles; essi vennero enunciati dal Salmon (*Analytic Geometry of Three Dimensions,* II ed., Dublin, 1865) e dallo Zeuthen (*Sur le principe de correspon-*

(1) *Application du principe de correspondance analytique à la démonstration du théorème de Bézout* (C. R., 81, 1875); *Application d'un théorème complémentaire du principe de correspondance, à la détermination sans calcul, de l'ordre de multiplicité d'un point* O *qui est un point multiple d'un lieu géométrique donné* (Ivi); *Détermination par le principe de correspondance analytique, de l'ordre d'un lieu géometrique défini par des conditions algébriques* (Id., 82, 1876); *Rectification à la communication précédente* (Id., 83, 1876); *Détermination par le principe de correspondance analytique, de l'ordre de la courbe ou surface enveloppe d'une courbe ou surface donnée* (Ivi); *Détermination, par la méthode de correspondance analytique, de l'ordre de la surface enveloppe d'une surface dont l'équation renferme* n *paramètres liés entre eux par* n—2 *relations* (Ivi).

(2) Si vedano le note *Ueber Entsprechen der Punksysteme auf einer Curve* (Math. Ann., 6, 1873) e *Ueber die Correspondenzformel* (Id., 7, 1874); inoltre Krey, *Note uber ein Eliminationsproblem* (Math. Ann., 12, 1877) e le due memorie recenti del Brill stesso *Ueber algebraische Correspondenzen* (Math. Ann., 31, 1888, e 36, 1890), a cui funge da commento la Diss. di F. Junker *Ueber algebraische Correspondenzen* (Tübingen, 1889).

dance du plan et de l'espace, C. R., 78, 1874); teoremi analoghi si leggono nel succoso articolo del Clifford *On Some Extensions of the Fundamental Proposition in M. Chasles' Theory of Characteristics* (Mathematics from the Educational Times, 49 e 50, 1866). L'estensione del principio stesso a spazî lineari qualunque fu fatta da E. Caporali (*Memorie di geometria*, Napoli, 1888, pp. 329-332), il quale però non pubblicò i risultati a cui era pervenuto, e, indipendentemente da lui, dal Pieri, di cui abbiamo una nota *Sul principio di corrispondenza in uno spazio lineare qualunque a* n *dimensioni* (Lincei Rend., IV, 3, 1887_1) ed un' altra *Sulla corrispondenza algebrica fra due spazii rigati* (Torino Atti, 25, 1890).

9. Innumerevoli sono le applicazioni che può ricevere il principio di corrispondenza, anche limitato a forme razionali di prima specie. Ad alcune fra esse è dedicato un gruppo di comunicazioni fatte da Chasles all'Accademia di Parigi, di cui il gran numero e la varietà di argomenti dimostrano che la grave età non aveva spento nel grande scienziato francese la fantasia di geometra di cui aveva date tante splendide prove nel corso della sua vita. Noteremo fra esse anzitutto la *Détermination, par le principe de correspondance, de la classe de la développée et de la caustique par réflexion d'une courbe géométrique d'ordre* m *et classe* n (C. R., 72, 1871), poi le molteplici e variopinte *Propriétés des courbes d'ordre et de classe quelconque démontrées par le principe de correspondance* (Ivi); a queste si possono unire le proposizioni di cui abbiamo fatto menzione a p. 39, i *Théorèmes concernant les axes harmoniques des courbes géométriques, dans lesquels on considère deux séries de points qui se correspondent anharmoniquement sur une courbe unicursale* (Ivi), e i *Théorèmes relatifs aux axes harmoniques des courbes géométriques* (Id., 73, 1871, e 74, 1872). Ai *Théorèmes rélatifs aux obliques menées par les points d'une courbe, sous des angles de même grandeur* (Id., 74, 1872) si può riavvicinare la *Généralisation de la théorie des normales des courbes géométriques où l'on substitue à chaque normale un faisceau de droites* (Id., 80, 1875); stanno isolate le proposizioni *Sur les polygones inscrits ou circonscrits aux courbes* (C. R., 78, 1874), mentre i *Théorèmes généraux sur le déplacement d'une figure sur un plan* (Id., 80, 1875) devono avvicinarsi ai *Théorèmes relatifs au déplacement d'une figure plane*

dont deux points glissent sur deux courbes d'ordre et de classe quelconques (Id., 82, 1876). Interesse teorico assai grande, molto maggiore dei risultati che ebbero le ricerche ora citate, possiede la *Détermination immédiate, par le principe de correspondance, du nombre des points d'intersection de deux courbes quelconques d'ordre quelconque, qui se trouvent à distance finie* (Id., 75, 1872, e 76, 1873); tanto più che il ragionamento di Chasles è suscettibile di ampia generalizzazione ed abilita in molti casi a trovare il numero esatto delle soluzioni finite di *n* equazioni algebriche con altrettante incognite ed a risolvere questioni dello stesso genere, come dimostrarono il Fouret (1) ed il Saltel (2). Altre applicazioni del principio di corrispondenza si leggono nelle seguenti note di Chasles: *Application de la méthode de correspondance à des questions de grandeur de segments sur les tangentes des courbes* (C. R., 81, 1875), *Théorèmes dans lesquels entre une condition d'égalité de deux segments rectilignes* (Ivi), *Nouveaux théorèmes relatifs à des conditions d'égalité de grandeur des segments rectilignes sur les tangentes des courbes géométriques, d'ordre et de classe quelconques* (Ivi), *Détermination de la classe des courbes enveloppes qui se présentent dans la question d'égalité de grandeur de deux segments faits sur des tangentes de courbes géométriques* (Ivi), *Théorèmes dans lesquels se trouve une condition d'égalité de deux segments pris sur des normales et des tangentes des courbes d'ordre et de classe quelconque* (Ivi), *Théorèmes dans lesquels se trouvent des couples de segments ayant un rapport constant* (Ivi), *Théorèmes relatifs à des courbes d'ordre et de classe quelconques, dans lesquels on considère des couples de segments ayant un produit constant* (Id., 82, 1876), *Lieux géométriques et courbes enveloppes satisfaisant à des conditions de produit constant de deux segments variables* (Ivi), *Théorèmes relatifs à des couples de segments rectilignes ayant un*

---

(1) *Détermination à l'aide du principe de correspondance du nombre des solutions d'un système de* n *équations algébriques à* n *inconnues* (C. R., 78, 1874); *Détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points d'intersection de trois surfaces algébriques d'ordre quelconque* (Bull. S. M. F., 1, 1873); *Sur l'application du principe de correspondance à la détermination du nombre des points d'intersection de trois surfaces ou d'une courbe gauche et d'une surface* (Ivi); *Démonstration du nombre exact des solutions d'un système de* n *équations algébriques à* n *inconnues* (Id., 2, 1874).

(2) *Application du principe de correspondance analytique à la démonstration du théorème de Bézout* (C. R., 81, 1875).

rapport constant (Id., 83, 1876), *Théorèmes relatifs à des courbes d'ordre et de classe quelconques dans lesquels on considère des couples de segments rectilignes faisant une longueur constante* (Ivi), *Théorèmes relatifs à des couples de segments faisant une longueur constante, pris l'un sur une tangente d'une courbe, et l'autre sur une normale d'une autre courbe, les deux courbes étant d'ordre et de classe quelconques* (Ivi), *Théorèmes concernant des couples de segments pris l'un sur une tangente d'une courbe et l'autre sur une oblique d'une autre courbe, et faisant ensemble une longueur constante, les courbes étant d'ordre et de classe quelconques* (Ivi), *Théorèmes rélatifs à des systèmes de trois segments ayant un produit constant* (Ivi), e *Théorèmes relatifs à des systèmes de trois segments formant une longueur constante.*

Queste ricerche guidarono Chasles a concepire e formulare alcune leggi generali di geometria piana, delle quali val la pena di riferire gli enunciati: I. Quando fra i dati di una questione avente per iscopo la determinazione dell'ordine di un luogo (o della classe di un inviluppo), si trova che un punto deve scorrere sopra una curva d'ordine n, l'ordine (o la classe) che si cerca sarà della forma nf, f essendo una funzione degli altri dati della questione. E correlativamente (*Deux lois générales des courbes géométriques,* C. R. 84, 1877). II. Quando nella definizione di un luogo (o di un inviluppo) intervengono i punti e le relative tangenti dei punti di una curva d'ordine n e classe ν, l'ordine del luogo (o la classe dell'inviluppo) sarà della forma $nf + \nu\varphi$, f e φ essendo funzioni degli altri dati della questione (*Une loi générale des courbes géométriques, concernant l'intervention de chaque point d'une courbe et de la tangente de ce point, dans les questions des lieux géométriques et des courbes enveloppes,* Id., 85, 1877). III. Quando nella definizione di un luogo (o di un inviluppo) intervengono un punto di una curva d'ordine n e classe ν e la tangente in un altro punto, l'ordine del luogo (o la classe dell'inviluppo) conterrà a fattore il prodotto $n\nu$; che se per converso intervengono un punto della curva e le tangenti condotte da esso alla curva stessa l'ordine (o la classe) sarà della forma $nf + \nu\varphi + n\nu F$, f, φ, F essendo funzioni degli altri dati della questione (*Deux lois des courbes géométriques d'ordre et de classe* m *et* n, Ivi). La dimostrazione e la generalizzazione allo spazio di queste leggi si apprendono dai

seguenti lavori del Fouret: *Démonstration de deux lois géométriques enoncées par M. Chasles* (C. R., 85, 1877), *Sur l'extension à l'espace de deux lois relatives aux courbes planes données par M. Chasles* (Ivi) (1).

Dopo Chasles le applicazioni del principio di corrispondenza si moltiplicarono, tanto che si può dire non esservi scritto moderno di geometria in cui non se ne trovino una o più, perchè in molti casi esso rappresenta il modo più conveniente per esprimere geometricamente che gli enti considerati sono algebrici; onde sarebbe vano il tentativo di enumerarle qui tutte. Facciamo eccezione soltanto pei lavori seguenti, come quelli che provano quanto presto le idee di Chasles siansi diffuse e siano state apprezzate e svolte: Fouret, *Sur la détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points de contact ou d'intersection sous un angle donné des courbes d'un système avec une courbe algébrique* (Bull. S. M. F., 5, 1877), e *Détermination par le principe de correspondance du nombre des points d'un plan en lesquels se touchent trois courbes appartenant respectivement à trois systèmes donnés* (Ivi); Saltel (oltre agli scritti citati a pag. 272) *Considérations générales sur la détermination, sans calcul, de l'ordre d'un lieu géométrique* (Bélgique Mém., 24, 1875), e *Sur le principe de correspondance et le moyen qu'il offre de lever quelques difficultés dans les solutions analytiques* (C. R., 82, 1876).

10. Il metodo delle caratteristiche ideato da Chasles si può dire abbia due fondamenti essenziali. Cioè il principio di corrispondenza, sul quale c'intrattenemmo nei due nn. prec., e la proposizione che dice " il numero delle coniche di un sistema avente per caratteristiche μ, ν che soddisfanno ad una nuova condizione semplice è della forma $\alpha\mu + \beta\nu$ "; tale proposizione, che sussiste in tutti i casi considerati da Chasles, fu da lui ritenuta per vera incondizionatamente, e vera pure fu supposta

---

(1) Cfr. anche le due note del medesimo geometra, che si leggono nello stesso volume dei C. R.: *Sur l'ordre (ou la classe) d'une courbe plane algébrique dont chaque point (ou chaque tangente) dépend d'un point correspondant d'une autre courbe plane et de la tangente en se point*, e *Sur les lois qui régissent l'ordre (ou la classe) des courbes planes algébriques dont chaque point (ou chaque tangente) dépend à la fois d'un point et d'une tangente variables sur une courbe donnée.*

una somigliante proposizione che il Cremona enunciò sui sistemi doppiamente infiniti (nell'articolo citato a pag. 264). Anzi non soltanto quel teorema di Chasles si considerò per vero, ma degli egregi geometri credettero di essere giunti in possesso di dimostrazioni inconfutabili di esso; basti citare, per convincere il lettore della verità di quanto asseriamo, i lavori seguenti: Clebsch, *Zur Theorie der Carakteristiken* (Math. Ann., 6, 1873), Halphen (mem. cit. a pag. 267), Tognoli, *Sui sistemi di curve piane* (Giorn. di Mat., 13, 1875), Lindemann (in *Vorl. üb. Geom. von A. Clebsch*, Leipzig, 1875), Hurwitz e Schubert, *Ueber den Chasles'schen Satz* $\alpha\mu + \beta\nu$ (Götting. Nachr., 1876).

Tuttavia esso (e altrettanto si dica per quello di Cremona) non è vero incondizionatamente. Lo rilevarono quasi contemporaneamente il Saltel, nella nota *Sur la formule indiquant le nombre des coniques d'un système* (μ, ν) *satisfaisant à une cinquième condition* (Belgique Bull., II, 42, 1876) (1), e l'Halphen, nell'articolo *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques* e *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre* (C. R., 83, 1876). Ma le modificazioni di cui abbisogna in generale l'enunciato di Chasles (le quali provengono da una forma degenere che può assumere una conica, a snidare la quale non era forse sufficiente l'ingegno esclusivamente geometrico di questo grande matematico), nonchè la determinazione dei casi in cui esso è vero, sono il tema di parecchi importantissimi scritti di Halphen che qui citiamo coll'onore che meritano: *Sur la théorie des caractéristiques pour les coniques* (Proc. L. M. S., 9, 1878), *Sur le nombre des coniques qui, dans un plan, satisfont à cinq conditions projectives et indépendantes entre elles* (Id., 10, 1879), *Sur la théorie des caractéristiques pour les coniques* (Math. Ann., 15, 1879) e *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre* (Journ. Éc. pol., 45, 1878 (2).

I risultati ottenuti dall'Halphen furono in seguito esposti diversamente dal del Pezzo (*Sui sistemi di coniche*, Napoli Rend., 23, 1884) e dal Burali-Forti (*Sui sistemi di coniche quàdriche*,

---

(1) Cfr.: Chasles, *Lettre relative à une comunication de M. L. Saltel sur la théorie des deux caractéristiques* (Belgique Bull., II, 44, 1877), e le seguenti *Observations* di Folie, Catalan e Chasles.

(2) Cfr. Hisst, *On Halphen's New Form of Chasles' Theorem on Systems of Conics satysfying four Conditions* (Brit. Ass., 1878).

Giorn. di Mat., 24, 1886), i suoi concetti furono sviluppati (fra altri dal Burali-Forti nelle note *Sui sistemi i volte infiniti di quàdriche,* Ivi, e *Sopra il sistema di quadriche che hanno l'*n*—pla polare comune,* Palermo Rend., 4, 1890), e combattuti dallo Study (*Ueber die Geometrie der Kegelschnitte insbesondere deren Charakteristikenproblem,* Math. Ann., 27, 1886; *Abbildung der Mannigfaltigkeit aller Kegelschnitte einer Ebene auf einem Punktraum,* Id., 40, 1892, e *Ueber Systeme von Kegelschnitte,* Ivi) (1). Questi ultimi scritti accesero una discussione fra lo Zeuthen e lo Study (la terza in ordine di tempo di quelle cui diede origine la geometria numerativa, ma fra quelle da noi sinora incontrate, seconda) (2), e di cui i varî momenti sono segnati, oltrechè dai precitati lavori dello Study, dagli articoli seguenti: Zeuthen, *Sur la révision de la théorie des caractéristiques de M. Study* (Math. Ann., 37, 1890), Study, *Entgegnung* (Id., 40, 1892), Zeuthen, *Exemples de la détermination des coniques dans un système donné qui satisfont à une condition donnée* (Id., 41, 1893).

11. L'ultimo grande progresso compiuto dalla Geometria numerativa è opera di H. Schubert. Tacendo delle brevi note che questo egregio geometra pubblicò a varie riprese in Götting. Nachr., perchè i risultati ivi esposti entrarono a far parte di più estesi lavori posteriori, citeremo le seguenti importanti memorie intitolate: *Beiträge zur Abzählende Geometrie. Erste Abhandlùng* (Math. Ann., 10,1876), *Moduln vielfacher Bedingungen bei Flächen zweiter Ordnung* (Ivi), *Tangentensingularitäten der Allgemeinen Ordnungsfläche* (Id., 11, 1877) (3); *Das Correspomdenzprincip für Gruppen von* n *Punkten und von* n *Strahlen* (Id., 12, 1877), *Singularitäten des Complexes* n*-ten Grades* (Ivi), alle quali si debbono unire quelle già citate a pagg. 136, 268, 270 e 271. In esse sono posti i fondamenti e svolte molte applicazioni im-

---

(1) Lo Study anzi estese la ricerca anche al succitato teorema di Cremona, nella nota *Ueber die Cremona'sche Charakteristikenformel* (Math. Ann., 27, 1886).

(2) Cfr. pag. 263.

(3) Cfr.: Krey, *Ueber singuläre Tangenten algebraischer Flächen* (Id., 15, 1879), Cayley, *On Schubert's Method of the Contact of a line with a Surface* (Quart. Journ., 17, 1880), e J. C. Kluyver, *Kenmerkende getallen der algebraische ruimtekromme* (Amsterdam Versl., III, 7, 1890) e *Twaalfde wraagstuk beantwoord* (Nieuw Archief voor wiskunde, 17, 1890).

portanti di una trattazione metodica della disciplina che ci occupa. Gran parte del loro contenuto è divenuto ingrediente della maggiore opera dello Schubert, cioè del libro intitolato *Kalkül der abzählenden Geometrie* (Leipzig, 1879), dalla cui comparsa si può far datare l'erezione della Geometria numerativa a dottrina autonoma ed indipendente. Come punti più salienti di essa rileveremo l'esposizione metodica da un punto di vista elevato e generale dei principî di corrispondenza già noti e di altri nuovi, l'enunciato generale del problema delle caratteristiche per qualunque figura geometrica e la dimostrazione di procedimenti per risolverlo in un gra numero di casi. Malgrado una discussione che sollevò l'apparizione di quest'opera (1) non dubitiamo che la considerazione in cui essa è tenuta, e che è già grande, andrà vieppiù crescendo col numero dei geometri che si dedicheranno allo studio, all'ulteriore svolgimento od almeno all'applicazione dei metodi in essa consegnati.

Come continuazione del libro dello Schubert ci imbattiamo anzitutto — oltrechè nello studio già citato (p. 270) sulla geometria numerativa del triangolo — nelle note di lui *Ueber dreipunktige Berührung von Curven* (Götting. Nachr., 1880), *Lösung der auf die trilineare Verwandtschaft ausgedehnte Projectivitätsproblem* Hamburg, 1882), e *Einstufige Ausartungen der quadratischen Trasformationen der Ebene* (Hamburger. Mitth., 1, 1880). Ci si presenta poi la bella collezione di lavori in cui lo Schubert generalizzò i proprî metodi e gran parte dei proprî risultati a spazî lineari comunque estesi, lavori di cui diamo l'elenco: *Die* n-*dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes* (Math. Ann., 26, 1885), *Die* n- *dimensionale Verallgemeinerung der Anzahlen für die vielpunktig berührenden Tangenten einer punktallgemeinen Fläche* m^{ten} *Grades* (Ivi), *Lösung der Charakteristiken-Problems für lineare Räume beliebiger Dimension* (Hamburger Mitth., 1, 1889), *Anzahl-Bestimmung für lineare Räume beliebiger Dimension* (Acta, 8, 1886), *Ueber Räume zweiten Grades* (Hamburger. Mitth. 1, 1889), *Kegelschnitt-Anzahlen als Functionen*

(1) Halphen, *Observations suv la théorie des caractéristiques* (Bull. S. M. F., 8, 1880); Schubert, *Réponse aux observations de M. Halphen sur la théorie des caractéristiques*, e *Note sur l'évaluation du nombre des coniques faisant partie d'un système et satisfaisant à une condition simple* (Ivi).

der Raumdimension n (Id., 2, 1890), *Ueber eine Verallgemeinerung der Aufgaben der abzählenden Geometrie* (Id., 3, 1891), *Mittheilungen aus der abzählenden Geometrie* p-*dimensionaler Räume ersten und zweiten Grades* (Verhandl. der Ges. deutschen Naturf. und Aerzte, Halle, 1891), *Beitrag zur Liniengeometrie in* n *Dimension* (Ivi), *Beziehungen zwischen den linearen Räumen auferlegbaren charakteristischen Bedingungen* (Math. Ann., 38, 1891), e *Allgemeine Anzahlfunctionen für Kegelschnitte, Fläche und Räume zweiten Grades in* n *Dimensionen* (Id., 45, 1894).

Lo Schubert non trovò sinora molti seguaci; se si toglie lo Sturm, di cui molti fra i lavori già ricordati si riattaccano alla Geometria numerativa, ed il Castelnuovo autore di una interessante nota sul *Numero degli spazi che segano più rette in uno spazio ad* n *dimensioni* (Lincei Rend., V, 5, 1889_2), si può dire che il citato geometra tedesco abbia trovato un solo imitatore e collaboratore efficace, M. Pieri, di cui meritano menzione assai onorevole le memorie seguenti (nonchè due altre che già citammo a pag. 273): *Sopra un teorema di geometria ad* n *dimensioni* (Giorn. di Mat., 26, 1888), *Formule di coincidenza per le serie algebriche* ∞^n *di coppie di punti dello spazio a* n *dimensioni* (Palermo Rend., 5, 1891), e *Sul problema degli spazi secanti* (Rend. Ist. Lomb., II, 26, 1893, e 27, 1895); memorie che mostrano aver saputo anche la patria nostra efficacemente contribuire allo sviluppo di uno dei rami della geometria da cui la matematica ragionevolmente attende la soluzione di non pochi problemi importanti.

CAPITOLO X.

Geometria non-euclidea.

L'ultima categoria di lavori di cui ci dobbiamo occupare comprende una serie di ricerche che diedero origine a vivaci discussioni, e — strano a dirsi! — divisero per qualche tempo i matematici in due campi l'un contro l'altro armato; oggi, dopo conchiusa la pace, esse formano quelle parti della scienza dell'estensione che si chiamano *Geometria non-euclidea* e *Geometria degli spazî a quantesivogliano dimensioni* (1); a quella è dedicato il presente Cap., a questa il successivo (2).

---

(1) A dimostrare come le questioni a cui si riferiscono questi lavori fecero perdere ad alcuni scienziati quella imparzialità e quella serenità di giudizio che dovrebbero sempre presiedere alle loro discussioni, riferirò qui due brani tolti, l'uno da un autore ben noto ai cultori della filosofia, l'altro da un giornale molto diffuso in Germania: " ... so gewiss ist es logische Spielerei ein System von vier oder fünf Dimensionen noch Raum zu nennen. Gegen alle solche Versuche soll man sich wahren; sie sind Grimassen der Wissenschaft und durch völlig nutzlosen Paradoxien das gewöhnliche Bewusstsein einschüchtern und über sein gutes Recht in der Begrenzung der Begriffe täuschen " (Lotze, *Logik*, p. 217). " Die absolute oder nicht euklidische Geometrie, die Geometrie des endlichen Raumes und die Lehre von *n* Raumdimensionen sind entweder Karrikaturen oder Krankheitserscheinungen der Mathematik " (J. Gilles in Blätter für das Bairische Gymnasial- und Realschulwesen, 18, 1878, p. 423). " Die verschiedenen sogenannten Nicht-Euklidischen Geometrien sind thatsächlich Nichts weiter, als eine ganz willkürliche Façon de parler ohne wissenschaftliche Bürgschaft und Ueberzeugung " (A. Karagiannides, *Die Nicht-euklidische Geometrie vom Alterthum bis zur Gegenwart*, Berlin, 1893, p. 44). Si veggano anche le troppo vivaci espressioni del Dühring riferite da B. Erdmann a p. 85 della pregevole monografia sopra *Die Axiome der Geometrie;* inoltre: Kroman, *Unsere Naturerkenntniss* (trad. Fischer-Benzon, Kopenhagen, 1883, p. 145-175), e Stallo, *La matière et la physique moderne* (Paris, 1884, cap. XIII e XIV). — A tutti costoro si può rispondere con le belle parole del Beltrami: " Quando questi tentativi (di rinnovamento radicale dei principii) si presentano come frutto di investigazioni coscienziose e di convinzioni sincere, quando essi trovano il patrocinio di un'autorità imponente e fin qui indisputata, il dovere degli uomini di scienza è di discuterli con animo sereno, tenendosi lontani egualmente dall'entusiasmo e dal disprezzo ".

(2) Per la bibliografia dell'argomento in discorso si veda: G. Bruce Halsted, *Bibliography of Hyperspace and Non-Euclidian Geometry* (Am. Journ., 1 e 2, 1878-79) ed il 2° vol. (p. I-XX) delle *Opere* di Lobatscheffsky citate qui appresso (p. 288).

1. Nessuno ignora che fra tutte le proposizioni contenute negli *Elementi* di Euclide una ve n'ha che a stento ci si adatta a porre, come fa il geometra greco, fra quelle che non esigono dimostrazione; è il celebre Postulato V (1), che dice: " se una retta ne incontra due altre e fa con queste due angoli interni dalla stessa parte la cui somma è minore di due retti, tali due rette prolungate indefinitamente s'incontreranno da quella parte ove la somma dei due angoli è inferiore a due retti ". Benchè Euclide non lo dica, pure è pressochè certo che egli ha avvertito la difficoltà nascosta in questa proposizione che, come il serpente biblico, s'annida nella geometria e ne corrompe la paradisiaca bellezza, in questa proposizione che il d'Alembert non esitò a considerare per " l'écueil et le scandale des éléments de la géométrie " (2); lo prova la distribuzione delle proposizioni componenti il I Libro degli *Elementi*, di cui le prime ventotto sono indipendenti dal celebre postulato, ed in cui il teorema dell'angolo esterno di un triangolo è considerato due volte (prop. 16 e 32) per distinguere in esso quella parte che è vera anche se si nega il detto postulato.

La storia non ha registrato i tentativi fatti da Euclide per togliere il neo che brutta il suo sistema geometrico; ha registrato invece quelli dei geometri posteriori, molti dei quali si sforzarono di surrogare il postulato di Euclide con altro di più facile accettazione; fra questi basti qui ricordare un astronomo di primo ordine, Claudio Tolomeo (87-165) (3), un egregio traduttore arabo, Nasîr-Eddîn (1201-1274), ed un rinomato matematico, il Wallis (4).

2. Gli sforzi fatti per depurare la geometria di Euclide dall'imperfezione esistente nella teoria delle parallele crescono col

---

(1) Un tempo era chiamato Assioma XI; ma dopo l'edizione critica di Euclide dovuta all'Heiberg, divenne certezza il dubbio (Hankel, *Vorlesungen über die complexen Zahen und ihre Functionen*, I Th., 1867, p. 52) che ad un errore di ricopiatori ne fosse dovuta la inserzione fra gli assiomi.

(2) V. i *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie*, 5, IV ed. (Paris, 1767), p. 200-219, e l'articolo " Parallèle " nel *Dictionnaire encyclopédique des Math.*, 2 (Paris, 1789), p. 519.

(3) Cantor, *Vorl. über Geschichte der Math.*, 1 (II ed., Leipzig, 1894), p. 395.

(4) Questi mostrò come al sistema euclideo potesse darsi una base indiscutibilmente rigorosa ammettendo l'esistenza di una figura simile ad un'altra ed avente dimensioni arbitrarie.

diffondersi dell'interesse per le ricerche geometriche: il descriverli equivarrebbe a tracciare la storia della geometria elementare, il che esorbita dalla cornice del nostro quadro (1). Va però fatta un'eccezione a favore dell'opera di Girolamo Saccheri (1667-1733) dal titolo *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia* (Milano, 1733), la quale a ragione fece riguardare questo geometra come un precursore di Legendre, di Lobatscheffsky e Bolyai (2); che realmente meriti questo nome è evidente considerando che egli diede alle ricerche sul postulato di Euclide un indirizzo affatto originale, dimostrando esservi tre geometrie secondochè si ammetta che in un quadrilatero ACBD avente retti gli angoli in A e B, ed eguali i lati AC, BD, gli angoli in C e D sono acuti, retti od ottusi; ma poi egli dedicò per lungo tempo un " diuturnum praelium " a dimostrare (e qui con discutibile risultato) l'impossibilità delle due ipotesi differenti dall'euclidea, che allora ritenevasi come l'unica vera e possibile. Tali investigazioni, malgrado i loro indiscutibili pregi, rimasero isolate e sterili e vennero ben presto dimenticate.

Non maggior fortuna ebbe un posteriore analogo tentativo del grande geometra tedesco J. H. Lambert, contenuto nella memoria postuma sopra la *Theorie der Parallelenlinien* (scritta

---

(1) Il lettore desideroso di maggiori notizie bibliografiche ricorra all'elenco di lavori sulla teoria delle parallele anteriori al 1837, che Engel e Stäckel compilarono, sfruttando lavori analoghi anteriori, ed inserirono a p. 287-313 della pregevole opera: *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie* (Leipzig, 1895), opera a cui attingemmo largamente nel redigere il presente Cap. — Osserviamo soltanto che ai dì nostri, applicando il celebre aforisma di Abel " on doit donner au problème une forme telle qu'il soit toujours possible de le résoudre ", invece di proporsi di dimostrare il postulato di Euclide, si è posta la questione se esso sia dimostrabile. Donde la *Note* dell'Hoüel *Sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le postulatum d'Euclide* (Nouv. Ann., II, 9, 1870), la *Lettre à M. Quetelet sur diverses questions mathématiques* del Genocchi e il *Rapport* su di essa redatto dal de Tilly, l'una e l'altro inseriti in Belgique Bull., II, 36, 1873.

(2) E. Beltrami, *Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewsky* (Lincei Rend., IV, 5, 1889_1).

Dopo che il Beltrami ebbe esumato l'opera del Saccheri, il Mansion ne fece un'analisi negli Ann. de la Soc. sc. de Bruxelles, 14, Parte II, 1889-90, l'Halsted ne intraprese l'esposizione in *The American Mathematical Monthly* (1, 1894), finalmente Engel e Stäckel ne pubblicarono una completa versione tedesca nella raccolta succitata.

nel settembre 1766 ed inserita in Leipziger Magazin für Mathematik, 1786) su cui solo in questi ultimi mesi fu attratta l'attenzione dei geometri (1), ed ove, in sostanza, è ridotta la questione se sia vero o meno il postulato euclideo a quella di riconoscere la specie del quarto angolo di un quadrilatero avente tre angoli retti; tre geometrie nascono dal supporre che esso sia retto, ottuso, acuto, la prima delle quali è quella del piano euclideo, la seconda quella della sfera euclidea, mentre la terza (osservazione totalmente originale ed importantissima che fa fede dell'acutezza e profondità di pensiero di Lambert) si verificherebbe sopra una sfera di raggio immaginario; e Lambert, osservando appunto quel che accade sulla sfera, asserì la necessità di una dimostrazione pel postulato euclideo; nè mancò di notare come, ove la somma degli angoli di un triangolo fosse differente da due retti, esisterebbe una costante assoluta, una specie di naturale unità di lunghezza.

8. Alle ricerche intorno ai fondamenti della geometria non poterono restare indifferenti i geometri dell'enciclopedia ed i loro successori immediati, i quali inaugurarono l'èra scientifica attuale, di cui (come a ragione nota Humboldt) uno dei caratteri più spiccati è la critica imparziale di tutto il retaggio del passato. Ed infatti numerosi sono i geometri francesi che meditarono sulla grande questione suscitata dal postulato d'Euclide, ma le loro conclusioni, benchè abbiano raggiunto una notorietà assai grande, possiedono un valore di gran lunga minore di quelle del Saccheri e del Lambert, giacchè consistono in gran parte in opinioni non dimostrate od in *aperçus* aspettanti tuttora il necessario sviluppo. Così Fourier (1768-1830), a perfezionare la teoria delle parallele, propose delle nuove definizioni per la retta ed il piano fondate sul concetto di movimento e sulla nozione di sfera (2). Dal canto suo Lagrange ravvisò l'indipendenza delle formole della trigonometria sferica dal postulato d'Euclide e sperò di dedurre da tal fatto una dimostrazione di questo, ritenendo

(1) Essa pure si trova riprodotta nel lavoro di Engel e Stäckel.
(2) Séances des Écoles normales, Débats, 1 (nouv. éd., Paris 1800), p. 28.

inconcludenti tutte le altre (1): che egli stesso abbia poi riconosciuta la vanità di tale impresa, sembra emergere da un aneddoto riferito dal de Morgan (2), secondo il quale il celebre geometra italiano avrebbe composto negli ultimi anni della sua vita una memoria sulle rette parallele, avrebbe anzi cominciato a leggerla all'Accademia di Parigi, ma poi avrebbe improvvisamente interrotta la lettura colle parole " Il faut que j'y songe encore! „. Nè, parlando di Lagrange, è da dimenticare come lo scritto di F. Daviet de Foncenex (1734-1799) *Sur les principes fondamentaux de la méchanique* (Miscellanea Taurinensia, 2, 1761) — su cui il Genocchi (1817-1889) (3) richiamò di recente l'attenzione dei matematici (4) — si riattacca allo studio de' principî fondamentali della geometria e fu probabilmente ispirato (se non dettato) dal famoso inventore del Calcolo delle variazioni (5). Assai più decisivi di questo lavoro e delle osservazioni che condussero Carnot e Laplace a proporre (come aveva già fatto il Wallis) di sostituire il postulato di Euclide con quello che afferma l'esistenza di figure fra loro simili, furono le ricerche di A. M. Legendre, il quale, dopo avere tentato di determinare, appunto con questo principio, il teorema sulla somma degli angoli di un triangolo (*Élém. de géom.*, I éd., 1794) — teorema la cui verità implica quella del postulato di Euclide —, dimostrò, senza invocare il postulato medesimo, nè altro equivalente, che la detta somma non può essere maggiore di due retti e che se è eguale a due retti per uno speciale triangolo, lo sarà per qualunque altro (6).

---

(1) Hoüel, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire* (Paris, 1867), p. 76 nota.

(2) *A Budget of Paradoxes* (London, 1872), p. 173.

(3) Cfr.: F. Siacci, *Cenni necrologici di Angelo Genocchi* (Torino Mem., II, 39, 1889); E. d'Ovidio, *Discorso in commemorazione di Angelo Genocchi* (Torino Atti, 27, 1892).

(4) *Intorno ad una dimostrazione di Daviet de Foncenex* (Torino Atti, 4, 1869), e *Sur un mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géomètres non-euclidiens* (Torino Mem., II, 29, 1877).

(5) Cfr. l'*Eloge* di Lagrange tessuto dal Delambre e riprodotto in testa alle *Œuvres de Lagrange.*

(6) *Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle* (Mém. de l'Acad. des Sc., 12, Paris, 1833). I risultati di Legendre sono assai noti grazie all'esposizione che ne fece il Baltzer nella Parte IV dei suoi *Elementi di matematica.*

Non è fuor di proposito notare qui con G. Tarry (*Sur un théorème indé-*

4. Circa contemporanei agli studî di Legendre sul postulato di Euclide sono quelli di Gauss. Quale fu il movente di tali indagini, quale il punto di partenza, quali i risultati concreti raggiunti da quello che i tedeschi considerano come il " princeps mathematicorum „? Sono questi problemi storici, la cui soluzione è desiderabilissima e ardentemente desiderata, ma la quale oggi non è dato raggiungere. Gli è che Gauss non pubblicò (1), e forse nemmeno mise sulla carta le proprie investigazioni sull'argomento e gli unici documenti che si possono invocare per determinarne l'estensione e la portata sono i seguenti (2): 1° una lettera a W. Bolyai dell'anno 1799 pubblicata dallo Schering *Nella solennità del centenario della nascita di C. F. Gauss* (ne cito la trad. italiana che si trova in Ann. di Mat., II, 9, 1878-79), 2° due recensioni inserite nelle *Göttinger gelehrten Anzeigen* del 20 aprile 1816 e del 28 ottobre 1822 (*Gauss, Werke,* 4, 1873, p. 364-370), 3° due lettere scritte da Gauss a F. W. Bessel (1784-1846) negli anni 1829 e 1830 (*Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel,* Leipzig, 1880, p. 490-497), 4° alcune del 1831 e 1846 a H. C. Schumacher (1780-1850) (*Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher,* 2, Altona, 1860, p. 255-262 e 266-272, e 5, 1863, p. 246-247), 5° una di cui non è noto che il soggetto (v. Engel e Stäckel, op. cit., p. 246) (2), 6° una del 1824 recentemente giunta nel dominio del pubblico (Id., p. 248) (3). Ora da tutti questi scritti emerge senza dubbio che Gauss ebbe un'idea perfettamente chiara del modo in cui è da intendersi e risolversi il problema scientifico generato dal postulato di Euclide, anzi che egli era in possesso di molte delle verità a cui si sogliono collegare i nomi di Lobatscheffsky e Bolyai; è per converso ignoto fino a qual punto egli siasi spinto nella nuova via, come è ignoto se egli abbia ricevuto qualche ispirazione dall'opera del Saccheri che esisteva

---

pendant du postulatum d'Euclide, Journ. de math. élémentaires, 19, 1895) che è indipendente dal postulato di Euclide anche il teorema " un triangolo avente eguali due bisettrici interne, è isoscele „.

(1) Lo trattenne forse la tema del " Geschrei der Gegner „ di cui parla in una lettera a Bessel del 1829?

(2) Cfr. Engel e Stäckel, op. cit., nella quale sono adunati tutti gli altri documenti sull'argomento. Ulteriori notizie sulle investigazioni di Gauss si otterrebbero forse dal carteggio di questo con Bartels (1769-1836); ma, ove si trovano le lettere che lo compongono?

(3) V. anche Sartorius von Walterhausen, *Gauss zum Gedächtniss* (Leipzig, 1856), p. 81.

a Gottinga negli anni 1790-1800 (essendo segnata con un asterisco nella *Bibliotheca mathematica* del Murhard (1)), oppure dalle ricerche di Legendre, come opina il Mansion; e l'asserzione di F. Klein, che alla influenza di Gauss siamo debitori degli studî di questi ultimi geometri (2), ha l'aspetto di un teorema in attesa di dimostrazione. Gli elementi per chiarire questi punti oscuri si trovano probabilmente nei manoscritti di Gauss tuttora inediti esistenti a Gottinga, di cui lo studio e l'eventuale pubblicazione è un còmpito nobilissimo che ha, di fronte al mondo scientifico, la schiera dei giovani geometri che conta la Germania, e nei quali l'ardore per la ricerca di nuovi veri non soffoca l'interesse per lo studio della storia.

A due di questi (3) si deve la scoperta di una coppia di investigatori con cui si chiude la preistoria della geometria non-euclidea, cioè: F. K. Schweikart (1780-1857), di cui va ricordata l'opera *Die Theorie der Parallellinien nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie* (Jena und Leipzig, 1807), e che Gauss asserisce inventore di una " Astralgeometrie „ indipendente dal postulato euclideo; e F. A. Taurinus (1794-1874) autore di una *Theorie der Parallellinien* (Köln, 1825), ed al quale è diretta l'ultima delle succitate lettere di Gauss (4).

5. Con questi scritti si chiude il periodo di preparazione latente del ramo di geometria di cui ci stiamo occupando. Vuoi che ad essi mancasse il sorriso della fortuna, vuoi che i tempi non fossero ancora maturi perchè venisse accolta per vera una teoria che conduceva a conclusioni in aperta contraddizione con

---

(1) Osservazione fatta dall'Halsted nell'articolo *The Non-Euclidian Geometry Inevitable* inserto in The Monist, July 1894.

(2) *Nicht-Euklidische Geometrie*, Wintersemester 1890-91, autographirt(Göttingen, 1893), p. 175. Cfr. anche un articolo dell'Halsted in *Science* (New Series, 2, 1895, p. 308-9) sopra l'opera di Engel e Stäckel.

(3) V. l'opera summentovata di Engel e Stäckel.

(4) Alla preistoria della geometria non-euclidea converrebbe ascrivere anche Grassmann, ma non lo facciamo perchè l'*Ausdehnungslehre* uscì sette anni dopo che apparve in Journ. f. Math., 17, la memoria fondamente del Lobatscheffsky; chi desidera conoscere le relazioni fra la geometria non-euclidea ed i metodi del prelodato geometra ricorra all'Appendice I della 2ª ed. (1878) di *Die Ausdehnungslehre* von 1844.

Altri precursori minori dei geometri non-euclidei sono ricordati dall'Halsted nel precitato articolo di *The Monist;* mentre alcune antiche osservazioni sulla teoria delle parallele sono esposte nella nota del Mansion *Sur la géométrie non-euclidienne* (Mém. de la Soc. sc. de Bruxelles, 13, 1889).

quanto è attestato dai sensi, fatto sta che non a Saccheri, nè a Lambert, nè a Schweikart, nè a Taurinus, la sorte concesse di legare il proprio nome alla geometria non-euclidea: lo avrebbe forse potuto e nol volle Gauss, per ragioni che non giova indagare, e lasciò che la nuova luce venisse dai più lontani confini di Europa, cioè dalla Russia e dalla Transilvania.

Giacchè Nicolò Lobatscheffsky (1793-1856) (1) fin dagli anni 1815 e 1816 tenne all'Università di Kasan delle importanti conferenze sulla geometria, e l'11 febbraio 1826 presentò alla sezione fisico-matematica dell'Università stessa una *Exposition des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles,* un sunto della quale apparve in russo nel *Messaggiero di Kasan* del 1829. Ivi è dimostrata chiaramente la possibilità di una geometria indipendente dal postulato di Euclide, il che venne messo in luce ancora migliore nei *Nuovi fondamenti di geometria con una teoria completa delle parallele,* stampati negli Atti dell' Università di Kasan degli anni 1835-1838. Alla diffusione in Europa delle proprie idee provvide il Lobatscheffsky stesso pubblicando in Journ. f. Math., 17 (1837) la sua *Géométrie imaginaire,* poi a parte le *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (Berlin, 1840; II ed., ivi, 1887) (2) e la *Pangéométrie* (Kasan, 1855) (3): opere che non tardarono a riscuotere il plauso dei geometri (4).

D'altra parte Wolfango Bolyai (1775-1856), amico e condi-

---

(1) Cfr. E. Janischefsky, *Notice historique sur la vie et les travaux de Nicolas Ivanovich Lobachefsky* (Bull. Bonc, 2, 1869); A. Vasiliev, *Nicolái Ivánovich Lobachéwsky.* Translated from the Russian with a Preface by G. Bruce Halsted (Austin, 1894). Una traduzione tedesca dello stesso discorso fu fatta dall'Engel ed inserita in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, 7 (Leipzig, 1895).

Una *Collection complète des Œuvres géométriques* del geometra di cui ci occupiamo fu recentemente fatta sotto gli auspicî dell'università di Kasan; nel 2° vol. (1886) si trovano raccolte le opere scritte in francese ed in tedesco. Basandoci su questa edizione abbiamo fatto la nostra scelta fra le molteplici ortografie proposte pel nome dello scienziato russo.

(2) Ne conosciamo una traduzione francese dell'Hoüel (Bordeaux Mém., 4, 1866; II ed., Paris, 1895) ed una inglese di G. Bruce Halsted (IV ed., Austin, 1892).

(3) Ne esiste una versione italiana del Battaglini (Giorn. di Mat., 5, 1867).

(4) Basti infatti ricordare la frase scultoria del Clifford: " What Vesalius was to Galen, what Copernic was to Ptolemy, that was Lobatschewsky to Euclid ". E a tal proposito ricorderò la parte che ebbe il Clifford alla diffu-

scepolo di Gauss, spinse il proprio figlio Giovanni (1802-1860) ad occuparsi della teoria delle parallele (1): il frutto delle ricerche di questi occupa solo ventotto pagine in aggiunta all'opera di Wolfango intitolata *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi* (Maros Vásárhely, 1832) e reca l'intestazione seguente: *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquàm decidenda) indipendentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica* (2). Un sunto di tutta l'opera fu pubblicato nel 1851 in tedesco nella medesima città dell'Ungheria, con un lungo titolo che comincia colle parole *Kurzer Grundriss eines Versuches,* colle quali viene d'ordinario citato.

I risultati concordanti che Lobatscheffsky e Bolyai ottennero e che Gauss si affrettò di sanzionare con la sua imponente autorità, furono la base di una geometria totalmente nuova, rigorosa quanto la geometria euclidea, esente da contraddizioni, ed indipendente dal postulato di Euclide o da altro che gli equivalga; essa concorda in molte parti coll'ordinaria geometria (3), se ne scosta in tutte quelle teorie collegate all'ipotesi della parallela unica. Alla nuova geometria, o geometria non-euclidea, negarono diritto d'asilo nel santuario delle scienze esatte quelli che per principio rifiutan fede a tutto ciò che

---

sione in Inghilterra delle nuove idee (v. *Lectures and Essays*, London, 1879, e la prefazione di J. S. Smith a *Mathematical Papers by W. K. Clifford*, London, 1882), analoga a quelle che rappresentarono l'Hoüel in Francia ed in Italia il Battaglini.

(1) A. Forti, *Intorno alla vita ed agli scritti di Wolfang e Giovanni Bolyai di Bolya, matematici ungheresi* (Bull. Bonc, 1, 1868). G. Bruce Halsted ha promesso, anzi annunciata come prossima, una biografia completa dei Bolyai, fondata sopra nuovi documenti ungheresi, e che riuscirà senza dubbio interessantissima.

(2) Fu tradotta in italiano dal Battaglini (Giorn. di Mat., 6, 1868), in francese dall'Hoüel (Bordeaux Mém., 5, 1868; II ed., Paris, 1895), in tedesco liberamente dal Frischauf (*Absolute Geometrie nach Johann Bolyai*, Leipzig, 1872; la prefazione contiene dei dati biografici sui Bolyai), ed in inglese dall'Halsted (IV ed., Austin, 1896; l'interessante introduzione comprende molte notizie sulla storia della geometria non-euclidea).

(3) Ad es. tutta la geometria proiettiva è indipendente dal postulato d'Euclide: ciò emerge chiaramente dall'esposizione fattane da Staudt, ma fu per la prima volta notato da F. Klein in una memoria di cui parleremo a pag. 295.

contraddice alle grossolane testimonianze degli organi dei nostri sensi; fu accolta invece come simbolo di importante progresso da tutti coloro che seppero apprezzarne l'indiscutibile e grande valore logico. Oggi, accanto all'antico sistema euclideo, si suol collocarne un secondo altrettanto pregevole, che ad Euclide si può far risalire soltanto per essere stato ottenuto seguendo i procedimenti rigorosi d'indagine che il grande alessandrino c'insegnò coll'esempio.

6. A questa sconfitta dei misoneisti, a questa vittoria della logica sul cieco empirismo, contribuirono possentemente alcuni lavori di capitale importanza di Riemann, Helmholtz (1821-1895) (1) e Beltrami apparsi negli anni 1867 e 1868.

Quello di Riemann (ove s'incontrano le tre forme che può assumere la geometria) *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen,* scritto nel 1855 e pubblicato da R. Dedekind dopo la morte dell'autore (Götting. Abh., 13, 1867) (2), per la generalità dei concetti, la concisione della forma e la presenza di considerazioni più famigliari ai filosofi che ai matematici, riuscì e riesce ancora di difficile intelligenza, non solo ai principianti, ma anche a chi è già provetto nelle matematiche discipline (3). Tuttavia il problema generale ivi trattato, quello cioè di assegnare le proprietà atte a caratterizzare pienamente lo spazio (non necessariamente a tre dimensioni), e i concetti fondamentali della soluzione di esso non tardarono a diffondersi, perchè Helmholtz, dopo essersene occupato indipendentemente da Riemann, prendendo anzi le mosse da un punto completamente diverso, espose le conclusioni a cui era pervenuto sotto forma prettamente scientifica ai matematici (4), sotto forma popolare al gran pub-

(1) Cfr. L. Königsberger, *Hermann von Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanick* (Leipzig, 1896).

(2) Riprodotto in *Riemann's Math. Werke* (Leipzig, 1876), ove (p. 517) è descritta dal Dedekind l'impressione che esso fece su Gauss. Tradotto in francese dall'Hoüel (Ann. di Mat., II, 3, 1869-70; II ed., Paris, 1895) ed in inglese dal Clifford (*Math. Papers,* p. 55).

(3) Aggiungasi che il lavoro di Riemann non era destinato alla stampa, essendo lo schizzo di una conferenza scolastica il cui uditorio non era composto di soli matematici. — Un commento completo allo scritto di Riemann sarebbe lavoro meritorio ed è opera desideratissima.

(4) V. la nota *Ueber die Thatsachen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Götting. Nachr., 1868, oppure Wissenschaftliche Abhandlungen, 2, Leipzig,

blico in conferenze ed articoli di giornali destinati al volgarizzamento delle nozioni scientifiche (1). Fa però mestieri osservare che la teoria di Helmholtz, benchè ricca di intrinseci pregi, presenta delle gravi imperfezioni, le quali vennero segnalate e corrette dal Lie (2), che, risolvendo completamente quello che egli chiamò " problema di Riemann e Helmholtz " (3), fece una delle più memorabili applicazioni conosciute della sua teoria dei gruppi di trasformazioni: l'esposizione di essa occupa alcuna fra le più interessanti pagine dell'ultimo volume della grande *Theorie der Transformationsgruppen,* dal Lie composta in collaborazione con F. Engel.

Non meno efficace pel consolidamento della Geometria non-euclidea fu il classico *Saggio d'interpretazione della geometria non-euclidea* pubblicato nel 1868 da Eugenio Beltrami in Giorn. di Mat., 6 (4). Chè il rigore delle argomentazioni e l'eleganza analitica che lo informano attrassero su di esso l'attenzione dei geometri; il brillante e sorprendente risultato che le proposizioni caratteristiche della geometria non-euclidea si verificano sopra le superficie (pseudosferiche, cioè) a curvatura costante negativa dell'ordinaria geometria impressionò in modo favorevole alla nuova teoria coloro che negano ogni valore alle affermazioni disformi da quanto testificano i sensi ed assicurò il trionfo delle nuove vedute; infine i sani principî di filosofia

---

1883); cfr. A. Krause, *Kant und Helmholtz, über den Ursprung und die Bedeutung der Raumenschauung und der geometrischen Axiome* (Zeitschr. f. Math., 14, 1869), e Rosanes, *Ueber die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauung vom Raume* (Breslau, 1871).

(1) *Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie* (Heidelberger Jahrbücher der Literatur, 1868); *Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome* (Populäre wissenschaftliche Vorträge, 3, Braunschweig, 1876).

(2) *Bemerkungen zu v. Helmholtz' Arbeit über die Thatsachen die der Geometrie zu Grunde liegen* (Leipziger Ber., 38, 1886); *Ueber die Grundlagen der Geometrie* (Id., 42, 1890).

(3) Eccone l'enunciato: Trovare le proprietà che spettano tanto alla schiera dei movimenti euclidei quanto alle due schiere di movimenti non euclidei, e che bastano a distinguerle da tutte le schiere di movimenti di una varietà numerica.

(4) Una versione francese di esso, dovuta all'Hoüel, è inserita in Ann. Éc. norm., 6, 1869.

Alcune delle idee ivi esposte furono criticate dal Genocchi nella bella memoria che tratta *Dei primi principii della meccanica e della geometria in relazione al postulato d'Euclide* (Mem. Soc. XL, III, 2, 1869).

scientifica ivi propugnati, e lo stile affascinante in cui sono esposti, fecero e fanno tuttora sorgere in tutti una viva, illimitata ammirazione pel nostro illustre connazionale (1). Rileviamo che, nel valutare questa memoria, non bisogna dimenticare come non abbia altro scopo che di insegnare una *rappresentazione* dei principî della geometria non-euclidea; essa presuppone l'ordinaria teoria della curvatura delle superficie, onde, sinchè non siasi insegnato un modo per stabilirla senz'invocare il postulato di Euclide, chi pretendesse dedurre da essa delle conseguenze intorno alla struttura dello spazio nostro cadrebbe in un circolo vizioso.

7. La benefica influenza dei geometri testè nominati sopra la geometria tutta è dimostrata ad evidenza dal mutamento operatosi in questi ultimi tempi nel modo di considerare le proposizioni che stanno a base di essa. Mentre un tempo i geometri lasciavano sdegnosamente ai filosofi la cura di discutere se le verità di cui si occupano fossero necessarie oppure contingenti, inclinando verso la prima ipotesi, dopo, riconosciuta, coll'esempio del postulato d'Euclide alla mano, la base sperimentale della geometria, si sforzarono senza posa di determinare quali fatti sia indispensabile desumere dalla testimonianza dei sensi per erigere sopra solidi fondamenti la scienza dell'estensione (2), e per tal modo giunsero fra l'altro a riconoscere come

---

(1) Degli sviluppi su alcuni punti della memoria del Beltrami si leggono nelle note: *Teorema di geometria pseudosferica* e *Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle pseudosferiche* da lui pubblicate in Giorn. di Mat., 10, 1872, e negli scritti seguenti: Escherich, *Die Geometrie auf den Flächen constanter negativer Krümmung* (Wiener Ber., 69, 1874), Reina, *Sugli oricicli delle superficie pseudosferiche* (Lincei Rend., IV, 5, 1889_1), Bianchi, *Applicazioni geometriche del metodo delle approssimazioni successive del Picard* (Id., V, 3, 1894_1).

(2) Si paragonino le parole con cui il d'Alembert respinge l'opinione che le verità della meccanica siano sperimentali (*Traité de Dynamique*, Paris, 1758, p. XII) con le seguenti: " La géométrie et la mécanique doivent être envisagées comme des véritables sciences naturelles, fondées, ainsi que toutes les autres, sur l'observation, quoique, par l'extrême simplicité de leurs phénomènes, elles comportent un degré infiniment plus parfait de systématisation, qui a pu quelquefois faire méconnaître le caractère expérimental de leurs premiers principes „ (Comte, *Cours de philosophie positive*, 2ᵉ éd., 1, 1864, p. 87). " Nello stesso modo che, per fabbricare la teoria di un ramo di fisica, partiamo dall'esperienza, e fondiamo sui nostri esperimenti un certo numero di assiomi, che ne formano in tal modo la base, così gli as-

negli *Elementi,* oltre alle proposizioni assiomatiche onestamente dichiarate come tali, altre se ne trovino tacitamente assunte per vere. Chi legge le belle *Vorlesungen über neuere Geometrie* del Pasch (Leipzig, 1882), esamina le opere più recenti del Veronese (*Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare,* Padova, 1891; trad. in tedesco da A. Schepp, Leipzig, 1894) e del Killing (*Einführung die Grundlagen der Geometrie,* Paderborn, 1893) (1), studia altre indagini contemporanee, senza dimenticare i più reputati trattati scolastici recenti; e quelle e questi paragona con lavori più antichi, non stenterà a rilevare delle differenze sostanziali. Infatti, mentre in passato il maestro presentava le proposizioni indimostrate come verità necessarie, eterne, indiscutibili, nelle nuove egli guida per così dire il discente ad eseguire le esperienze necessarie per istabilire le premesse alle ulteriori deduzioni (2). Nelle antiche, il sistema geometrico euclideo appare come l'unico concepibile, nelle nuove, come uno dei molti che adottar si potrebbero. E queste differenze attestano la scomparsa di un inveterato e dannoso preconcetto, segnano pertanto un vero progresso, poichè per l'avanzamento della scienza il riconoscere un errore ha forse minore importanza dell'acquisto di una nuova verità? Ciò d'altronde non deve recare alcuna sorpresa; giacchè, come osserva il Beltrami nel succitato *Saggio,* " nella scienza matematica il trionfo di concetti nuovi non può mai infirmare le verità già acquisite: esso può soltanto mutarne

---

siomi, che prendiamo a base della geometria, per quanto meno palesemente, sono realmente un risultato dell'esperienza " (Clifford, *Il senso comune nelle scienze esatte,* Milano, 1886, p. 270). V. anche Hoüel, *Du rôle de l'expérience dans les sciences exactes* (Prag, 1875; tradotto in tedesco ed inserto in Arch. der Math., 59, 1876), e S. Roberts, *Remarks on Mathematical Terminology and the Philosophic Bearing of recent Mathematical Speculations concerning the Realities of Space* (Proc. L. M. S., 14, 1882).

(1) Cito in particolare le seguenti: Peano, *I principii di geometria logicamente esposti* (Torino, 1889); Bettazzi, *Il concetto di lunghezza e la retta* (Ann. di Mat., II, 20, 1892); Killing, *Ueber die Grundlagen der Geometrie* (Journ. f. Math., 109, 1892); Schmidt, *Geometrische Untersuchungen* (Id., 112, 1893); Pieri, *Sui principii che reggono la geometria di posizione* (Torino Atti, 30, 1895, e 31, 1896); Burckhardt, *Beiträge zur den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie* (Götting. Nachr., 1895); Hilbert, *Ueber die gerade Linie als kurzeste Verbindung zweier Punkte* (Math. Ann., 46, 1895); H. Wiener, *Weiteres über Grundlagen und Aufbau der Geometrie* (Deutscher Math.-Ver., 3, 1894).

(2) Si vegga specialmente la summentovata opera del Veronese.

il posto o la ragion logica, e crescerne o scemarne il pregio e l'uso. Nè la critica profonda dei principii può mai nuocere alla solidità dell' edificio scientifico, quando pure non induca a scoprirne e riconoscerne meglio le basi vere e proprie „.

8. Ai concetti che caratterizzano la geometria non-euclidea si è pervenuti anche per un'altra via che nulla ha di comune con quella seguìta dagl'indagatori finora considerati, e che è di massima importanza di delineare non foss' altro per far conoscere una categoria affatto nuova di argomenti atti a mostrare la perfetta legittimità di quei concetti apparentemente strani.

È notorio che, in seguito al *Traité des propriétés projectives des figures,* venne stabilita una distinzione netta fra le proprietà delle figure che non si perdono quando queste vengano projettate da un punto qualunque sopra un piano arbitrario, e quelle che non si conservano eseguendo una tale geometrica operazione. È del pari noto che della prima categoria fanno parte tutte le proprietà descrittive, ma soltanto alcune proprietà metriche. Ora il desiderio di togliere le conseguenti eccezioni fece sì che i geometri si domandassero se non fosse possibile considerare ed enunciare le proprietà metriche delle figure in modo che tutte si conservassero per proiezione. Per alcune classi di proposizioni Chasles e Poncelet risolsero la questione introducendo le feconde nozioni di " punti ciclici del piano „ e di " cerchio immaginario all'infinito „, per altre classi essa venne risoluta da Laguerre, il quale, in una *Note sur la théorie des foyers* (Nouv. Ann., 12, 1853; cfr. Faure, *Transformation des propriétés métriques des figures,* Id., 18, 1859), riuscì a rendere projettivo il concetto di angolo, servendosi appunto delle nozioni testè ricordate; ma chi la sciolse con piena generalità e grande eleganza fu il Cayley, il quale nel celebre *Fifth Memoir upon Quantics* (Phil. Trans., 149; 1859) (1) dimostrò che qualsivoglia proprietà metrica di una figura piana si può considerare come inclusa in una relazione projettiva fra questa ed una conica fissa (detta " assoluto „), mentre nello spazio ogni teorema della geo-

(1) Crf. la prima delle memorie del Battaglini *Sulle forme ternarie quadratiche* (Napoli Atti, 3, 1867).

metria di misura è caso particolare di un altro in cui interviene una quadrica fissa (detta pure " assoluto „); se quella conica si spezza nella coppia dei punti ciclici, o questa quàdrica si riduce al cerchio immaginario all' infinito, si ritrovano le proprietà insegnate da Euclide ne' suoi *Elementi;* ma se si lascia ad esse tutta la generalità di cui sono suscettibili, si ottengono i sistemi geometrici di cui consta la geometria non-euclidea (1).

A porre in chiara luce i rapporti intimi è profondi che intercedono fra le ricerche di Cayley e quelle dei geometri di cui analizzammo le opere nelle pagine precedenti è destinato il memorabile scritto di Klein *Ueber die so-genannte nicht-euklidische Geometrie* (Math. Ann., 4, 1871) (2): il modo luminoso in cui tale scopo è raggiunto è sufficientemente attestato dall'altissima fama in cui ben presto salì e dall'immensa influenza che esercitò quella memoria (3). Aggiungiamo che una seconda memoria di Klein dallo stesso titolo (Math. Ann., 6, 1873) è destinata a chiarire alcuni punti della prima (4), e fu il punto di partenza di numerose ricerche intorno (5) a quello che a buon diritto si considera come il " teorema fondamentale della geometria pro-

---

(1) Si noti che nell'articolo del Cayley *On some Analytical Formulae and their Application to the Theory of Spherical Coordinates* (Cambridge Journ., 1, 1846) sono esposte le formole fondamentali della sferica analitica coll'intervento di una funzione quadratica omogenea delle coordinate, le quali sono in sostanza quelle che valgono nel piano ellittico. Inoltre nell'articolo *Sur le problème des contacts* (Journ. f. Math., 39, 1850) si trova risolto il problema d'Apollonio in una metrica generale: cfr. anche il *Mémoire* dello stesso autore *sur les coniques inscrites dans une même surface du second ordre* (Id., 41, 1851).

(2) Tali rapporti sembra non fossero sfuggiti al Beltrami ed al Fielder: v. *Analytische Geometrie der Kegelschnitte nach* G. Salmon, *frei bearbeitet von* W. Fiedler (IV Aufl., Leipzig, 1878) p. 697, nota 134.

(3) Ivi s'incontra la definizione di distanza di due punti mediante il prodotto di una costante pel logaritmo del rapporto anarmonico che essi formano colle intersezioni della loro congiungente coll'assoluto; ivi si trovano eziandio i nomi di geometria ellittica, parabolica ed iperbolica.

(4) Cfr.: V. Reyes y Prosper, *Sur la géométrie non-euclidienne* (Math. Ann., 39, 1887), e Pasch, *Ueber die projective Geometrie und die analytische Darstellung der geometrischen Gebilde* (Ivi).

(5) Vanno specialmente ricordate quelle di Lüroth e Zeuthen (esposte da Klein in Math. Ann., 7, 1874), di Thomae e Reye (v. le edizioni II e III dell'opera *Die Geometrie der Lage* di quest'ultimo), dello Schur (*Ueber den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie*, Math. Ann., 17, 1880), del Darboux (*Sur le théorème fondamental de la géométrie projective*, ivi) e del de Paolis (*Sui fondamenti della geometria projettiva*, Lincei Mem., III, 9, 1880-81).

jettiva „ (1). Di recente lo stesso Klein, in occasione di un corso di geometria non-euclidea (che venne poi litografato e che noi citammo in nota a pag. 287), ritornò sullo stesso tema con un'interessante nota *Zur nicht-euklidischen Geometrie* (Math. Ann., 37, 1890), a cui fece seguito quella del Killing, *Ueber die Clifford-Klein'schen Raumformen* (Id., 39, 1891).

9. La creazione di nuovi sistemi geometrici accanto a quelle di Euclide suggerì ai geometri un nuovo ed assai vasto problema, quello cioè di cercare in quali teorie degli spazî non-euclidei siano incluse quelle che formano la geometria classica: tale problema occupò per parecchi anni i geometri e diede risultati più o meno interessanti dei quali qui deve essere fatto cenno. Ricorderemo anzitutto l'estensione della ordinaria trigonometria che fu intrapresa da Cayley stesso (*On the Non-Euclidian Geometry,* Math. Ann., 5, 1872), e completata dallo Story (*On the Non-Euclidian Trigonometry,* Am. Journ., 4 e 5, 1882-83) e da M. Simon (*Die Trigonometrie in der absoluten Geometrie,* Journ. f. Math., 109, 1892) (2); in seguito l'estensione analoga che, nelle note *On the Theory of the Evolute* (Phil. Mag., 29, 1865), e *On Evolutes and Parallel Curves* (Quart. Journ., 11, 1871) del Cayley stesso, ricevette un'altra teoria nota; poi la soluzione data dal Battaglini (*Nota sui circoli della geometria non-euclidea,* Giorn. di Mat., 12, 1874; cfr. Ricordi, *I circoli nella geometria non-euclidea,* Id., 18, 1880) del problema che corrisponde alla costruzione del cerchio che ne taglia tre altri sotto angoli dati e la generalizzazione della *Kreisverwandtschaft* del Möbius (v. pag. 232) dovuta al medesimo geometra (*Sull'affinità circolare non-euclidea,* Giorn. di Mat., 16, 1878) (3); la voluminosa opera di F. Tirelli intesa a rivelare *Le fonti della geometria di Euclide* (Napoli, 1884-86), ed a cui fa seguito il *Saggio di geometria metrico-projettiva* (Salerno, 1888) dello stesso, si propone la determinazione dei teoremi di cui

---

(1) Esso afferma che due punteggiate projettive sullo stesso sostegno non possono avere più di due punti uniti.

(2) V. anche: de Zolt, *Saggio di pangeometria* (Giorn. di Mat., 15, 1877).

(3) Si collegano a queste le memorie del medesimo geometra *Sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle coniche* e *Sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle quàdriche* (Giorn. di Mat., 12, 1874).

quelli di Euclide possono considerarsi come casi particolari. Più alto è il tema delle note di E. d'Ovidio *Sopra alcuni luoghi ed inviluppi di primo e secondo grado in geometria projettiva* (Napoli Rend., 14, 1875), *Le proiezioni ortogonali nella geometria metrico-projettiva* (Torino Atti, 11, 1876), *Le proprietà focali delle coniche nella metrica projettiva* (Id., 26, 1891), *Sulle coniche confocali nella metrica projettiva* (Ivi) e *Teoremi sulle coniche nella metrica projettiva* (Ivi), di cui le tre ultime hanno dei punti di contatto colla nota dello Story *On Non-Euclidian Properties of conics* (Am. Journ., 5, 1883). Del d'Ovidio va anche ricordato lo *Studio sulla geometria projettiva* (Ann. di Mat., II, 6, 1873) — al quale si può avvicinare la memoria di H. Stahl *Ueber die Maassfunctionen der analytischen Geometrie* (Berlin, 1873) e l'*Habilitationsschrift* di H. Frahm (Tübingen, 1873) —, le memorie seguenti: *I complessi e le congruenze lineari nella geometria projettiva* (Id., 7, 1875), *Alcune proprietà dei complessi e delle congruenze lineari in geometria projettiva* (Lincei Mem., II, 3, 1875-76), *Sulle reti di complessi lineari nella geometria metrico-projettiva* (Ivi), *Le serie triple e quadruple di complessi lineari nella geometria metrico-projettiva* (Ivi), nonchè i *Teoremi sui complessi lineari nella metrica projettiva* (Rend. Ist. Lomb., II, 14, 1881), e la nota *Su varie questioni di metrica proiettiva* (Torino Atti, 28, 1893), nella quale, fra l'altro, è trattata la questione del modo di definire il volume in uno spazio di curvatura costante, questione già trattata *ex-professo* nelle note seguenti: G. Loria *Sul concetto di volume in uno spazio lineare qualunque* (Giorn. di Mat., 26, 1888); R. S. Ball *On the Theory of Content* (Dublin Trans., 29, part. V, 1888); M. Simon *Zur Volumenbestimmung in der Lobatschewsky'schen Geometrie* (Math. Ann., 42, 1893). Al Cayley dobbiamo ancora la generalizzazione della teoria delle superficie minime (*Sur les surfaces minima,* C. R., 111, 1890), mentre l'estensione della teoria delle geodetiche fu invece indicata dal Lüroth assai prima nella nota appunto intitolata *Verallgemeinerung des Problems der kürzesten Linie* (Zeitschr. f. Math., 14, 1868). Il fatto notevole che la teoria degli isoperimetri si conserva in una metrica generale venne rilevato dal Bang (*Noglè Maximumsproblemer i den ikke euklidiske Geometri,* Tidsskrift, V, 5, 1887). Nè va dimenticato il lavoro del de Paolis sopra *La trasformazione piana doppia di secondo ordine e la sua*

applicazione alla geometria non-euclidea (Lincei Mem., III, 2, 1878), i cui risultati vennero poi estesi allo spazio dall'Aschieri nella memoria sopra *La trasformazione quadratica doppia di spazio e la sua applicazione alla geometria dello spazio non-euclideo* (Rend. Ist. Lomb., II, 14 e 15, 1881-82).

A sviluppi della teoria di cui ci occupiamo sono destinate lo scritto del Clifford intitolato *Analytical Metrics* (Quart. Journ., 6, 1865, e 7, 1866), al quale serve di complemento quello postumo *On the Theory of Distances* (Math. Papers, p. 130-164), l'altra memoria di H. Cox *Homogenous Coordinates in Imaginary Geometry* (Quart. Journ., 18, 1881) (1), le note di Cayley *On the Non-Euclidian plane Geometry* (Proc. R. S., 37, 1884) e *Non-Euclidian Geometry* (Cambridge Trans., 15, 1892), ed il lavoro del Réthy intitolato *Die Fundamental-Gleichungen der nicht-euklidischen Geometrie auf elementarem Wege abgeleitet* (Arch. der Math., 58, 1882).

Questi scritti conducono naturalmente a citare gl'importantissimi del Bianchi *Sull'applicabilità delle superficie negli spazî di curvatura costante* (Lincei Mem., III, 2, 1878), *Sui sistemi di Weingarten negli spazii di curvatura costante* (Id., IV, 4, 1887), *Sulle superficie d'area minima negli spazii a curvatura costante* (Ivi), *Sulle forme quadratiche differenziali indefinite* (Id., 5, 1888), *Sulle divisioni regolari dello spazio non euclideo in poliedri regolari* (Id., V, 2, 1893) (2), *Sulle superficie a curvatura nulla negli spazii di curvatura costante* (Torino Atti, 30, 1895), e *Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica* (Ann. di Mat., II, 24, 1896); di natura analoga sono le ricerche di C. Fibbi sopra *I sistemi doppiamente infiniti di raggi negli spazii di curvatura costante* (Pisa Ann., 1891) ove fra l'altro è generalizzato il celebre teorema di Malus-Dupin (v. p. 15).

10. Di un altro ordine sono i risultati consegnati nella bella memoria del Lindemann *Ueber unendlich kleine Bewegungen starrer Körper bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung* (Math. Ann.,

(1) Cfr. anche lo scritto del medesimo autore *On the Application of Quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different Kinds of Uniform space* (Cambridge Trans., 13, 1882).

(2) È questo un tema che in questi ultimi tempi venne più volte trattato; se non citiamo i lavori ove è svolto, gli è che essi son piuttosto di pertinenza dell'analisi.

7, 1873) ove sono generalizzate le classiche teorie del moto e delle forze, e di cui possono intendersi come proseguimenti quelle di A. Buchheim *On the Theory of Screws in Elliptic Space* (Proc. L. M. S., 15, 16 e 17; 1884-85); di R. S. Heath *On the Dynamics of a Rigid Body in Elliptic Space* (Phil. Trans., 175, 1884), e di W. Burnside *On the Kinematiks of Non-Euclidian Spaće* (Proc. L. M. S., 26, 1894) (1). Indirizzo diverso dalla memoria del Lindemann hanno gli *Études de mécanique abstraite* (Belgique Mém., 21, 1870) del de Tilly e l'*Essai* dello stesso *sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique* (Bordeaux Mém., II, 3, 1879); analoghe in certo modo a queste ricerche sono quelle che tendono a determinare come si presenterebbero i fenomeni fisici in uno spazio non-euclideo, fra cui vanno ricordate quelle dello Schering sopra *Die Schwerkraft im Gaussischen Raume* (Götting. Nachr., 1870) (2), del Fresdorf *Ueber die Geometrie und die Potentialfunction im Gaussischen und Riemannschen Raum* (Diss. Göttingen, 1873), quelle del Cesàro riguardanti *Moti rigidi e deformazioni termiche negli spazii curvi* (Lincei Rend., IV, 4, 1882_2), quelle del Padova (1845-1896) sopra *La teoria di Maxwell negli spazii curvi* (Id., IV, 5, 1889_1). E qui cade in acconcio far menzione della splendida memoria del Beltrami *Sulle equazioni generali dell'elasticità* (Ann. di Mat., II, 10, 1881), ove è dimostrato essere le equazioni generali dell' elasticità indipendenti dal postulato d'Euclide e sono poi determinate le equazioni dell'isotropia in uno spazio di curvatura costante.

11. Ricorderemo ancora le note commentative del Battaglini *Sulla geometria immaginaria del Lobatschewsky* (Giorn. di Mat., 5, 1867; trad. in francese in Nouv. Ann., II, 7, 1868) e le *Considérations sur quelques singularités qui se présentent dans les constructions de la géométrie non-euclidienne* del Bouniakowsky (Petersbourg Mém., 18, 1872), quella del Mansion sopra la *Relation entre les distances de cinq points en géométrie non-euclidienne* (Mem. de la

(1) Si veggano anche le note postume del Clifford: *Motion of a Solid in Elliptic Space* (Math. Papers, p. 378-384) e *On the Theorg of Screws in a Space of Constant Positive Curvature* (Ivi, p. 402-405); inoltre Most, *Neue Darlegung der absoluten Geometrie und Mechanik mit Berücksichtigung der Frage nach den Grenzen des Weltenraumes* (Coblenz 1883).

(2) Notiamo a tale proposito che il Lipschitz narra (Journ. f. Math., 74, 1872) avere Lejeune-Dirichlet fin dal 1850 studiata la legge di gravitazione nello spazio non-euclideo.

Soc. Sc. de Bruxelles, 15, 1892), le *Notes sur la géométrie euclidienne et sur la géométrie non-euclidienne* (Mathésis, II, 1, 1891) dello stesso geometra e quella del de Tilly *Sur le principe fondamental de la géométrie riemannienne* (Id., 4, 1894), le *Bemerkungen über den Beweis des Satzes von der Winkelsumme des Dreiecks* (Math. Ann., 29, 1887) del Petersen, l'*Elementar-geometrische Ableitung der Parallelenconstruction in der absoluten Geometrie* (Journ. f. Math., 107, 1890) di M. Simon, le osservazioni *Ueber das Parallelenaxiom* (Deutsch. Math.-Ver., 1, 1892) e la *Construction der Tangenten an Kreis und Grenzkreis, und Beweis dass der Lobatschewsky'sche Raum eine doppelt unendliche Menge von Kugeln mit unendlich grossem Radius enthält* (Id., 3, 1894) del medesimo autore. Nè possiamo dimenticare la memoria del Busche *Ueber eine rationale nicht-euklidische Massbestimmung* (Hamburger Mitth., 3, 1892) ove è definita la distanza dei punti di coordinate cartesiane $(x_1 y_1)$ e (x_2, y_2) mediante la funzione $(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)$, e l'angolo di due rette in modo correlativo.

Ma fra tutte le recenti memorie sulla geometria non-euclidea le più importanti sono quella del Segre *Sulle geometrie metriche dei complessi e delle sfere e sulle loro mutue analogie* (Torino Atti, 19, 1883), e l'altra, di indole più generale e strettamente collegate alle indagini del Lie, del Poincaré *Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie* (Bull. S. M. F., 14, 1887) (1).

12. Le nuove dottrine di cui ci siamo occupati in questo capitolo furono oggetto di esposizioni metodiche. Le più antiche sono quelle di C. Flye S.te Marie (*Études analytiques sur la théorie des parallèles,* Paris, 1871) e del Frischauf (*Elemente der absoluten Geometrie,* Leipzig, 1875); ad esse seguono quelle del Killing (*Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung,* Leipzig, 1885), del Lindemann (v. le *Vorl. üb. Geom. von A. Clebsch,* 2, Leipzig, 1891), del Klein (v. le Lezioni litografate che menzionammo in una nota a pag. 287) e del Veronese (*Fondamenti di geometria* ecc.) (2); nè va taciuto che coll'opuscolo intitolato

(1) È da notarsi a questo proposito l'intervento di considerazioni non-euclidee nella omai celebre *Théorie des groupes fuchsiens* (Acta 1, 1882-83) dell'or citato geometra.

(2) Si vegga anche: R. Stawell Ball, *The Non-Euclidian Geometrie* (Hermhatena, 9) e l'articolo dello stesso autore *Measurement* nella 9ª ed. dell'Enciclopedia britannica.

Die Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die absolute Geometrie (Strassburg i. E., 1890), M. Simon si è proposto il lodevole intento di diffondere le nuove idee sulla geometria nelle scuole medie. Aggiungiamo finalmente che nell'*Essai de géométrie analytique générale* (Belgique Mém., 47, 1892) il de Tilly ha suggerito un nuovo punto di partenza per esporre la geometria non-euclidea, il quale, per essere generalmente accettato, abbisognerebbe di qualche ulteriore sviluppo, ciò che non toglie ad esso i pregi di indiscutibile novità che possiede.

Nè alle dottrine medesime mancarono delle esposizioni storico-critiche. Tacendo dei lavori di Erdmann, Rosanes e Karagiannides che già ci accadde di citare (p. 281 e 291), tacendo anche dello scritto polemico di A. de Commines de Marsilly intitolato *Études sur le " postulatum " d'Euclide et sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire* (Ass. fr., 1889), citeremo le *Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie* di J. C. Becker (Zürich, 1870), la memoria di R. Beez *Ueber euklidische und nicht-euklidische Geometrie* (Plauen i. V., 1888), la Diss. di A. Donadt *Das mathematische Raumproblem und die geometrischen Axiome* (Leipzig, 1881), e lo scritto di M. Simon *Zu den Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie* (Strassburg, 1891). Vanno uniti a questi lavori la nota del Mansion *Sur les principes fondamentaux de la géométrie, de la mécanique et de l'astronomie* (Paris, 1893), nonchè l'*Essai d'exposition élémentaire des principes fondamentaux de la géométrie non-euclidienne de Riemann* (Mathésis, II, 5, 1895) dello stesso geometra, a cui servì di complemento l'articolo *Sur les premiers principes de la métagéometrie et de la géométrie de Riemann* (Ivi), ed a cui si può unire la *Notice sur les recherches de M. de Tilly en métagéométrie* (Revue des questions scientifiques, 37, 1895).

Da tutto ciò risulta quale considerevole movimento intellettuale sia stato prodotto dalle nuove idee ora descritte sui fondamenti della geometria: ciò forse non basta ad assicurare un posto duraturo nella storia della scienza a coloro che per primi le formularono ed a renderli degni della perenne riconoscenza dei posteri?

CAPITOLO XI.

Geometria degli spazî a quantesivogliano dimensioni.

1. La teoria delle varietà comunque estese, o geometria degli spazî a quantesivogliano dimensioni (iperspazî), deve la propria origine al sussidio che l'algebra ricevette dalla geometria dopo che Descartes e Fermat insegnarono (v. pag. 15) ad applicare quella a questa. Invero questo aiuto sembra necessariamente limitato, giacchè soltanto i fatti analitici collegati alle teorie delle funzioni a una, due o tre variabili (ossia a quelle delle forme binarie, ternarie o quaternarie) sono suscettibili di una immediata rappresentazione concreta. Ma lo spirito di generalizzazione, che, come già notammo, fu e non cessò di essere pei moderni uno degli stimoli più potenti ed efficaci alla ricerca geometrica, diede ad essi la forza sufficiente per varcare i limiti che la natura sembrava avere posti alle loro facoltà immaginative e parlare di spazî comunque estesi, cioè di spazî analoghi alla retta, al piano ed allo spazio in cui viviamo, ma di cui ogni elemento fosse determinato da un gruppo di numeri composto di quantisivogliano elementi (1). E ne parlarono senza neppure proporsi la questione se esistano effettivamente tali spazî, sia che la considerassero di pertinenza, più della filosofia

(1) Chi meriti il nome di scopritore di questo nuovo mondo schiuso ai geometri è difficile dire. Si può osservare però che gli analisti del periodo cartesiano rappresentarono con un " ipersolido " il prodotto di quattro linee. D'altronde prima di loro Viète era ricorso per rappresentazioni ad uno spazio a nove dimensioni, e Stifel (1486-1567) ha scritto a questo proposito, nella sua edizione dell'*Algebra* del Rudolff, alcune frasi assai significanti che K. Fink ha riprodotte a p. 173 del suo *Kurzer Abriss einer Geschichte der Elementar-Mathematik* (Tübingen, 1890). Più tardi Leibniz ha parlato di " rectangule solide et ipersolide ", ed a Emanuele Kant (1724-1804) non isfuggì la possibilità di una geometria a più dimensioni; " eine Wissenschaft von allen diesen Raumarten ", egli scrisse, " wäre unfehlbar die höchste Geometrie, die ein endlicher Verstand unternehmen könnte " (*Kant's Werke*, ed. Hartenstein, 1, Leipzig, 1867, p. 22 e seg. Cfr. E. Fink, *Kant als Mathematiker*, Diss. Erlangen, 1889, p. 16). Che anche Gauss avesse un'alta fiducia nella legittimità e dell'avvenire della geometria a più dimensioni risulta da alcune parole scritte dal Sartorius v. Waltershausen a p. 81 del suo opuscolo, già ricordato, *Gauss zum Gedächtniss* (Leipzig, 1856).

e della fisica, che della matematica, sia che si fossero persuasi che la sua soluzione non potesse appianare le difficoltà analitiche a cui avevano intento lo sguardo; ed a ragione si comportarono in tal modo, perchè così, senza dar di cozzo in un problema forse insolubile, essi conseguirono il loro intento, quello cioè di avere a propria disposizione delle rappresentazioni (sensibili o soprasensibili poco importa, ma estremamente suggestive) di molte argomentazioni algebriche e dei risultati a cui queste conducono.

Il primo sviluppo metodico della geometria a più dimensioni venne tentato dal Cayley nei *Chapters in the Analytical Geometry of* n *Dimensions* (Cambridge Journ., 4, 1843), primo germe del più esteso lavoro dello stesso autore intitolato *A Memoir on Abstract Geometry* (Phil. Trans., 160, 1870). Quattro anni dopo la prima pubblicazione di Cayley, e probabilmente senz'averne cognizione, il Cauchy trattò lo stesso tema nell'articolo *Sur les lieux analytiques* (C. R., 24, 1847), il quale sembra non avere molto incontrato il favore del pubblico, e cadde in oblio così completo che fu necessario il Genocchi molti anni dopo ne segnalasse l'esistenza e ne rilevasse il significato nella già menzionata *Lettre à M. Quetelet sur diverses questions mathématiques* (Belgique Bull., II, 26, 1873).

2. Questo medesimo concetto di spazio ad n dimensioni come varietà numerica sta a base della memoria, a noi già nota, di Riemann *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (1), la quale, vuoi per l'originalità e l'importanza delle idee che racchiude, vuoi per l'agitazione che produsse in tutto il mondo dei geometri, è da considerarsi come fondamentale nell'argomento che trattiamo. A convincersene si rifletta che ivi è proposto un modo per definire e generare le varietà comunque estese, è fatto il primo tentativo di estendere agli spazî superiori l'ordinaria geometria metrica, e (generalizzando idee e metodi di Gauss) è introdotta la nozione di curvatura di tali spazî e calcolatone il valore.

---

(1) Cfr. anche la *Commentatio mathematica,* ecc., che porta il n° 22 in *B. Riemann's Gesammelte mathematische Werke* (Leipzig, 1876).

A chiarire, diffondere, completare le indagini di Riemann contribuì potentemente il Beltrami colla sua giustamente celebre *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante* (Ann. di Mat., II, 2, 1868-69), ove, fra l'altro, è dimostrato che in uno spazio di curvatura costante ad n dimensioni ogni linea geodetica è rappresentabile col sistema di $n-1$ equazioni lineari fra le coordinate di un punto. La questione, in certo modo reciproca, di definire uno spazio ad n dimensioni in cui le geodetiche sono rappresentabili in siffatta guisa, fu risolta dallo Schläfli, il quale trovò che un tale spazio è necessariamente a curvatura costante (1).

Da questi scritti derivano i seguenti: Schering, *Linien, Flächen und höhere Gebilde in mehrfach ausgedehnten Gauss'schen und Riemann'schen Raume* (Götting. Nachr., 1873); S. Newcomb, *Elementary Theorems Relating to the Geometry of Space of Three Dimensions and of Uniform Positive Curvature in the Fourth Dimension* (Journ. f. Math., 83, 1877); F. W. Frankland, *On the Simplest Continuous Manifoldness of Two Dimensions and of Finite Extent* (Proc. L. M. S., 8, 1877); W. Killing, *Ueber zwei Raumformen mit constanter positiver Krummung* (Journ. f. Math., 86, 1879), e *Die Rechnung in den nicht-euklidischen Raumformen* (Id., 89, 1880); T. Craig, *Note on the Projection of the General Locus of Space of Four Dimensions into Space of Three Dimensions* (Am. Journ., 2, 1879), e *On Certain Metrical Properties of Surfaces* (Id., 4, 1882); Vahlen, *Sur la surface de Fresnel* (Nouv. Ann., III, 14, 1895) (2). Nello stesso indirizzo è scritta la memoria del Page, *Transformations Groups in Space of Four Dimensions* (Annals of Mathematics, 9, 1894-95), l'opera del Killing dal titolo *Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung* (Leipzig, 1885) — a cui fa seguito la memoria dello Schur, *Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses mit den projectiven Räumen* (Math. Ann., 27, 1886) —, l'articolo del Cesàro sopra *Le deformazioni infinitesime degli iperspazii* (Napoli Rend., II, 9, 1895), e le note più

(1) V. la *Nota alla Memoria del sig. Beltrami "Sugli spazii di curvatura costante"* (Ann. di Mat., II, 5, 1871-73) e la successiva *Osservazione* del Beltrami.

(2) Ivi è ottenuta l'equazione della superficie delle onde in uno spazio a quantesivogliano dimensioni.

elementari del de la Rive *Sur l'emploi d'une quatrième dimension* (C. R., 120, 1895), et *Sur l'emploi d'une quatrième dimension en géometrie analytique* (Archives des sciences physiques et naturelles de Genève, 33, 1895).

3. Il concetto di spazio a più dimensioni come varietà numerica si ritrova anche nei tentativi di estendere a quantesivogliano variabili quelle ricerche che pel nostro spazio descrivemmo nel Cap. dedicato alla geometria differenziale. Tali sono quelle dello Schläfli, *Ueber das Minimum des Integrals* $\int \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}$ *wenn die Variabeln* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *durch eine Gleichung zweiten Grades gegenseitig von einander abhängen* (Journ. f. Math., 43, 1852), del Beltrami *Sulla teoria generale dei parametri differenziali* (Bologna Mem., II, 8, 1869) (1), e del Ricci *Sulla teoria degli iperspazii* (Lincei Rend., V, 4, 1895_2); tali quelle numerose ed importanti sull'estensione della nozione di curvatura, di cui le più cospicue sono consegnate nei lavori seguenti (2): Christoffel, *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades* (Journ. f. Math., 70, 1869); Lipschitz, *Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von* n *Differentialen* (Ivi), *Fortgesetzte Untersuchungen in Betreff ecc.* (72, 1870), *Ausdehnung de Theorie der Minimalflächen* (Id., 78, 1874), *Beitrag zur Theorie der Krümmung* (Id., 81, 1876), *Généralisation de la théorie du rayon osculateur d'une surface* (C. R., 82, 1876, o Journ. f. Math., 81, 1876), e *Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften* (Berliner Ber., 1882); Kronecker, *Ueber Systeme von Funktionen mehrerer Variabeln* (Id., 1869); Lie, *Ueber die jenige Theorie eines Raumes mit beliebig vielen Dimensionen, die der Krümmungstheorie des gewöhnlichen Raumes entspricht* (Götting. Nachr., 1871), e *Zur Theorie eines Raumes von* n *Dimensionen* (Ivi; cfr. anche Klein, *Liniengeometrie und metrische Geometrie,* Math. Ann., 5, 1872) (3); Suworoff, *Sur les*

(1) Cfr. Volterra, *Delle variabili complesse negli iperspazî* e *Sulle funzioni di iperspazî e sui loro parametri differenziali* (Lincei Rend., IV, 5, 1891_1).

(2) Parecchî di essi possiedono anche molto valore per gli analisti.

(3) In questi scritti di Lie e Klein si trova fra l'altro la generalizzazione del teorema di Dupin (v. p. 158) e di altri analoghi.

caractéristiques des systèmes de trois dimensions (Bull. Sc. math., 4, 1873); Beez, *Ueber das Krummungsmaass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung* (Math. Ann., 7, 1874), e *Zur Theorie des Krümmungsmaasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung* (Zeitschr. f. Math., 20, 1875, 21, 1876, e 24, 1879; v. anche la monografia già citata *Ueber euklidische und nicht-euklidische Geometrie,* Plauen i. V., 1888); Jordan, *Généralisation du théorème d'Euler sur la courbure des surfaces* (C. R., 79, 1874); Allé, *Zur Theorie des Gauss'schen Krümmungsmaasses* (Wiener Ber., 74, 1876); Voss, *Zur Theorie der Transformation der quadratischer Differentialausdrücke und der Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten* (Math. Ann., 16, 1880); Brill, *Bemerkung über pseudosphärische Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen* (Math. Ann., 26, 1886) (1); Hoppe, *Erweiterung einiger Sätze der Flächentheorie auf* n *Dimensionen* (Arch. der Math., II, 3, 1886); Pieri, *Intorno ad un teorema dei sigg. Betti e Weingarten* (Giorn. di Mat., 24, 1886 (2); Schafstein, *Ausdehnung eines die geradlinigen Strahlensysteme betreffenden Problems auf die* n*—dimensionale homogene Raumform* (Diss. Bonn, 1888); Berzolari, *Sulle equazioni differenziali delle quadriche in uno spazio ad* n *dimensioni* (Lincei Rend., V, 5, 1896_1). Aggiungiamo che al Mehler siam debitori di alcune osservazioni importanti *Ueber die Benutzung einer vierfachen Mannigfaltigkeit zur Ableitung orthogonaler Flächensysteme* (Id., 84, 1878), al Cesàro di una memoria sopra *Le formole di Codazzi negli iperspazii* (Napoli Rend., II, 8, 1894), nonchè di interessanti ricerche *Sulla geometria intrinseca degli spazii curvi* (Napoli Mem., II, 6, 1894), ed al Puchta di una nota *Ueber die allgemeinstein abwickelbaren Bäume. Ein Beitrag zur mehrdimensionalen Geometrie* (Wiener Ber., 101, 1892).

Ad estendere a spazî di quattro o n dimensioni la geometria differenziale delle curve tendono molti scritti, di cui basti qui ricordare i seguenti: Jordan, *Sur la théorie des courbes dans*

---

(1) Fra i risultati ottenuti in questi lavori è degno di particolare menzione l'accertamento del fatto che una varietà a $n > 2$ dimensioni immersa in una a $n+1$ dimensioni in generale non può deformarsi *in quest'ultima* senza rotture nè duplicature; lo potrà però, generalmente parlando invadendo uno spazio a più di $n+1$ dimensioni.

(2) Ivi è esteso allo spazio di n dimensioni il teorema che dice essere un'ellisse o un'iperbole il luogo de' punti per cui è costante la somma o la differenza delle distanze da due punti fissi.

l'espace à n *dimensions* (C. R., 79, 1874); H. Fromm, *Ueber die Krümmungsverhältnisse einer Kurve im* n*-fach ausgedehnten homogenen Raum von verschwindendem Krümmungsmasse* (Diss. Bonn, 1878); Brunel, *Sur les propriétés métriques des courbes gauches dans un espace linéaire à* n *dimensions* (Math. Ann., 19, 1882); Hoppe, *Ueber dreifach gekrümmte Curven und deren Parallelen* (Arch. der Math., 64, 1880), *Principien der* n*-dimensionalen Curventheorie* (Id., II, 6, 1888), *Fundamentalaxen der mehrfach gekrümmten Linien* (Id., 11, 1892), e *Osculierende Kugel nebst den analogen Gebilden für* n *Dimensionen* (Id., 12, 1893); Pirondini, *Sulle linee a tripla curvatura nello spazio euclideo a quattro dimensioni* (Giorn. di Mat., 28, 1890); Landsberg, *Zur Theorie der Krümmungen eindimensionaler, in höheren Mannigfaltigkeiten enthaltener Gebilde* (Journ. f. Math., 114, 1874).

Ancora: il teorema di Liouville intorno alle trasformazioni conformi del nostro spazio, di cui facemmo menzione in nota a pag. 250, fu esteso dal Beez, il quale, nella nota *Ueber conforme Abbildung von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung* (Zeitschr. f. Math., 20, 1875), dimostrò che le uniche rappresentazioni di uno spazio ad $n > 2$ dimensioni che conservino gli angoli sono l'eguaglianza, la simmetria, la similitudine e la trasformazione per raggi vettori reciproci generalizzata; mentre siamo debitori al Wolstenholme del teorema che dice essere in generale $\frac{n}{n-2} \{ (n-1)^d - 1 \}$ il numero delle normali di una superficie d'ordine n in uno spazio a d dimensioni che passano per un punto dato (*Educational Times,* 10, 1868).

Finalmente il Betti, il Tonelli, il Dyck ed il Poincaré studiarono con buon successo le questioni attinenti alla connessione di uno spazio comunque esteso. I lavori in cui essi esposero i loro risultati sono rispettivamente: *Sopra gli spazii di un numero qualunque di dimensioni* (Ann. di Mat., II, 4, 1870-71), *Sulla connessione degli spazii* (Lincei Rend., IV, 6, 1890_1), *Beiträge zur Analysis situs,* II *Aufsatz* (Math. Ann., 37, 1890), *Sur l'analysis situs* (C. R., 115, 1892).

Aggiungiamo essere stato dimostrato con opportuni esempî da G. Brunel (*Note sur l'analyse indéterminée et la géométrie à* n *dimensions,* Bordeaux Mém., III, 2, 1886) e da A. Puchta (*Ueber ein Satz von Euler-Brioschi-Genocchi,* Wiener Ber., 96, 1887) che

la considerazione di spazî superiori abilita a risolvere anche delle questioni di teoria dei numeri. In un altro campo dell'analisi venne pure sfruttata la geometria a *n* dimensioni, cioè nello studio delle sostituzioni lineari su due variabili complesse: chi vuole convincersene consulti la nota di P. del Pezzo *Sui gruppi Kleineani a due variabili* (Napoli Rend., II, 5, 1893).

4. Non abbiamo ancora parlato dell'esteso *Essai sur la géométrie à* n *dimensions* del Jordan (Bull. S. M. F., 3, 1875; cfr. il sunto inseritone in C. R., 75, 1872), ove è tentata una metodica generalizzazione della geometria metrica trattata mediante coordinate cartesiane; abbiamo differito a citarla sino a questo momento perchè al termine di essa è intrapresa l'estensione a spazî comunque estesi della cinematica dello spazio euclideo, ed è appunto ora che noi intendiamo dar notizia dei tentativi fatti per estendere alcune importanti discipline fisico-matematiche agli spazî di curvatura costante. Fra essi spetta il primo posto alla generalizzazione del problema dei tre corpi fatta dal Lipschitz nel ben noto lavoro intitolato *Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung* (Journ. f. Math., 74, 1872; cfr. *Extension of the Planetproblem to a Space of* n *Dimensions and of Constant Integral Curvature,* Quart. Journ., 12, 1874). Seguono ad essa in ordine di tempo le investigazioni di E. Schering sopra *Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gauss'schen und Riemann'schen Räumen* (Götting. Nachr., 1873) (1), e quelle intorno alla cinematica degli iperspazî, i cui risultati si apprendono dagli scritti del Clifford, *On the Free Motion under no Forces of a Rigid System in an* n-*fold Homaloid* (Proc. L. M. S., 7, 1876), e del Beltrami, *Formules fondamentales de cinématique dans les espaces de courbure constante* (Bull. Sc. math., 11, 1876); ad esse si collegano la memoria del C. J. Monro (1833-1882) *On Flexure of Spaces* (Proc. L. M. S., 9, 1878),la dissertazione di L. Scheeffer (1859-1885) *Ueber Bewegungen starrer Punktsysteme in einer ebenen* n-*fachen Mannigfaltigkeit* (Berlin, 1880), nonchè le memorie del Killing, *Die Mechanik in den nichteuklidischen Raumformen* (Journ.

(1) Cfr.: Opitz, *Einige Sätze über die Anziehung in mehrfach ausgedehnten Gauss'schen und Riemann'schen Räumen* (Diss., Göttingen, 1881). Va ancora rilevato che sino dal 1833 il Green (1793-1841) aveva studiato la legge di gravitazione in uno spazio ad *n* dimensioni.

f. Math., 98, 1885), dello Schur *Ueber die Deformation der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses* (Math. Ann., 27, 1886), e *Ueber die Deformation eines dreidimensionalen Raumes in einem ebenen vierdimensionalen Raume* (Id., 28, 1887), di F. N. Cole, *On Rotations in Space of Four Dimensions* (Am. Journ., 12, 1890), e di P. H. Schoute, *Le déplacement le plus général dans l'espace à* n *dimensions* (Ann. de l'Éc. pol. de Delft, 7, 1891), e *On the Order of the Groups related to Anallgmatic Displacements of the Regular Bodies in* n*-dimensional Space* (Brit. Ass., 1894), di F. Schottky, *Ueber die analytische Auflösung der Aufgabe der Rotation eines festen Körpers im vierdimensionalen Raume* (Berliner Ber., 1891), dello Stäckel *Ueber die Bewegung eines Punktes in einer* n*-fachen Mannigfaltigkeit* (Math. Ann., 42, 1893), e *Ueber Biegungen von* n*-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten* (Journ. f. Math., 113, 1893), e del Cesàro sopra *Le deformazioni infinitesime degli iperspazii* (Napoli Rend., II, 9, 1895) e *Sulle equazioni dell'elasticità negli iperspazii* (Lincei Rend., V, 3, 1894_2).

Di indole più analitica sono gli scritti seguenti: Cayley, *A Memoir on Prepotential* (Phil. Trans., 165, 1875), Kronecker, *Ueber Potentiale* n*-facher Mannigfaltigkeiten* (Coll. math., 1881), Tonelli *Sopra la funzione potenziale in uno spazio di* n *dimensioni* (Ann. di Mat., II, 10, 1882); Hoppe: *Anziehung eines der Kugel analogen Gebildes von* n *Dimensionen auf einen Punkt* (Arch. der Math., II, 4, 1886), e *Das* n*-dehnige* (n + 1)*-Eck in Beziehung auf seine Hauptträgheitsaxen* (Id., 5, 1887); Voss, *Ueber ein Theorem der analytischen Mechanick* (Math. Ann., 27, 1886); T. C. Lewis. *Application of Geometry of four Dimensions to determine Moments of Inertia of Bodies without Integration* (Quart. Journ.. 16, 1879).

5. La geometria cartesiana, specialmente se trattata mediante coordinate ortogonali, è in certo modo rispetto alla geometria analitica in generale, quello che la geometria elementare di Euclide è rispetto alla geometria generale. Come dalle formole e dai calcoli della geometria cartesiana nacquero, lasciando indeterminato il numero delle variabili, le investigazioni di geometria ad *n* dimensioni indicate nei nn. prec., così dalla geometria di Euclide si assurse ad una geometria elementare degli spazî ad *n* dimensioni, ammettendo la possibilità di considerare delle varietà differenti dal nostro spazio, non per l'intima strut-

tura, ma soltanto pel numero delle loro dimensioni, e quindi di studiare in essi delle figure analoghe a quelle che formano il primo campo delle ricerche del geometra.

Tale generalizzazione in molti casi non si può compiere agevolmente d'un tratto, ma può effettuarsi senza gravi difficoltà accrescendo successivamente di un'unità il numero delle dimensioni dello spazio su cui si opera. Donde la ragion d'essere di molti lavori concernenti la geometria dello spazio a quattro dimensioni, i quali, oltre all'importanza intrinseca che possiedono, devono venire ricordati per essere il primo passo verso risultati ben più generali. Fra essi citeremo quelli del Rudel che si riferiscono a *Sich kreuzende Ebene zweier Räume* (Blätter für das bairische Gymnasial und Realschulwesen, 13, 1877) ed a *Congruenz und Symmetrie* (Ivi), la *Berechnung einiger vierdehniger Winkel* (Arch. der Math., 67, 1881) dell'Hoppe, a cui serve di complemento la *Numerische Berechnung der Winkel von vier Dimensionen* (Id., 69, 1883) dello stesso autore; di questo vanno ancor ricordate le osservazioni *Ueber die Stellung der Ebene in der Vierdimensionengeometrie* (Id., 68, 1882), e le note intitolate: *Relation zwischen fünf Elementartetratopen mit vier unabhängigen Grössen, Tetratop auf beliebiger Basis*, e *Partielles Maximums eines Elementar-Tetratops* (Id. 69, 1883). Va ancora notata l'estensione allo spazio a quattro dimensioni della relazione scoperta da Descartes ed Eulero fra il numero degli spigoli, dei vertici e delle facce di un poliedro, a cui pervennero Durège (1), Hoppe (2) e Poincaré (3), che poi la generalizzarono a spazî lineari qualunque. Ma fra tali ricerche le più interessanti sono quelle che guidarono alla determinazione del numero e della struttura delle figure dello spazio a quattro dimensioni che sono analoghe ai poliedri regolari dell'ordinaria geometria; essa è dovuta a W. J. Stringham, il quale anzi nel suo scritto sull'argomento (*Regular Figures in* n-*dimensional Space,* Am. Journ., 3, 1880) si spinse sino a considerare l'analoga questione in ispazî lineari a quantesivogliano dimensioni. Altrettanto fecero H. Scheffler nell'opera

(1) *Ueber Körper von vier Dimensionen* (Wiener Ber., 83, 1881).

(2) *Regelmässige linear begrenzte Figuren von vier Dimensionen* (Arch. der Math., 67, 1881).

(3) *Sur la généralisation d'un théorème d'Euler relatif aux polyèdres* (C. R., 117, 1893).

Die polydimensionalen Grössen und die vollkommenen Primzahlen (Braunschweig, 1880), l'Hoppe, vuoi nella nota poco dianzi citata, vuoi in quella intitolata *Die regelmässigen linear begrenzten Figuren jeder Anzahl von Dimensionen* (Arch. der Math., 68, 1882), il Rudel negli scritti *Von den Körpern höherer Dimension* (Kaiserlautern, 1882) e *Ueber eine Gattung von Körpern höherer Dimension* (1887), lo Schlegel nella sua lunga e pregevole *Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde* (Abh. der Leopoldinischen Akademie, 44, 1883) (1), il Puchta nell'*Analytische Bestimmung der regelmässigen convexen Körper in Räumen von beliebigen Dimension* (Wiener Ber., 90, 1884; in continuazione all'*Analytische Bestimmung regelmässiger convexen Körper im Raume von vier Dimensionen* Id., 89, 1884), O. Biermann nell'articolo *Ueber die regelmässigen Körper höherer Dimension* (Id., 90, 1884), e M. Brückner nel lavoro che tratta *Die Elemente der vierdimensionalen Geometrie mit besonderen Berücksichtung der Polytope* (Jahresberichte des Vereins für Naturkunde zu Zwickau, 1893) (2). Più modesti intendimenti hanno gli scritti di Forchhammer *Pröver paa geometrie med fire dimensioner* (Tidsskrift, IV, 5, 1881), dell'Hoppe *Innere Winkel aller regelmässigen linear begrenzten Figuren von vier Dimensionen*

(1) Cfr. anche le note dello stesso autore *Sur un méthode pour représenter dans le plan les solides homogènes à* n *dimensions* (Palermo Rend., 5, 1891), e *Ueber Projectionen der mehrdimensionalen regelmässigen Körper* (Deutsch. Math.-Ver., 2, 1891-92).

Dalle prime delle citate memorie dello Schlegel togliamo, per maggior chiarezza, la descrizione dei sei solidi regolari dello spazio a quattro dimensioni:

I. Fünfzell = Pentaedroid, limitato da 5 tetraedri, con 10 facce, 10 spigoli e 5 vertici in ciascuno dei quali concorrono 4 corpi. II. Sechszehnzell = Exadecadroide; limitato da 16 tetraedri con 32 facce, 24 spigoli e 8 vertici in ognuno dei quali concorrono 8 corpi. III. Sechshundertzell=Hekakosioedroid; limitato da 600 tetraedri con 1200 facce, 720 spigoli e 120 vertici in ciascuno dei quali concorrono 20 corpi. IV. Vierundzwanzigzell=Ikosatetraedroid; limitato da 24 ottaedri con 96 facce, 96 spigoli e 24 vertici in ciascuno dei quali concorrono 4 corpi. V. Achtzell=Oktaedroid, limitato da 8 esaedri con 24 facce, 32 spigoli e 16 vertici in ognuno dei quali concorrono 4 corpi. VI. Hundertzwanzigzell=Hekatonikosaedroid; limitato da 120 dodecaedri con 720 facce, e 1200 spigoli e 600 vertici in ciascuno dei quali concorrono 4 solidi. Si corrispondono per dualità I e IV, II e V, III e VI.

(2) V. anche: Biermann, *Ueber die regelmässigen Punktgruppen in Räumen höherer Dimension und die zugehörigen linearen Substitutionen mehrer Variabeln* (Wiener Ber., 95, 1887), Hess, *Ueber die regulären Polytopen höherer Art* (Sitzungsber. der Ges. zur Bef. der gesamm. Naturwiss. zu Marburg, 1885), e Schoute, *Sur trois divisions régulières de l'espace à* n *dimensions* (Ass. fr., 1894).

(Arch. der Math., 68, 1882), e dello Schoute *Regelmässige Schnitte und Projectionen des Achtzelles und des Sechszehnzelles im vierdimensionalen Raume* (Amsterdam Versl., 2, 1894) e *Regelmässige Schnitte und Projectionen der Vierundzwanzigzelles im vierdimensionalen Raume* (Ivi) (1); i quali ci porgono l'occasione di notare come le proiezioni sul nostro spazio dei primi quattro corpi regolari dello spazio a quattro dimensioni siano state costruite dallo Schlegel e formino oggi una delle più curiose fra le Serie di modelli della celebre Collezione della casa L. Brill; lo stesso geometra si è poi occupato di illustrare con figure opportune anche la teoria delle figure magiche di 2,..., 5 dimensioni (v. Katalog, II, 6) (2).

La teoria delle figure regolari ci ha fatto quasi involontariamente ritornare nel campo degli spazî a quantesivogliano dimensioni, in cui ora rimarremo per citare i seguenti lavori che hanno per iscopo di estendere dei concetti, delle proposizioni, o dei problemi di geometria elementare: Borchardt, *Ueber die Aufgabe des Maximum welche die Bestimmung des Tetraeders vom grössten Volumen bei gegebenem Flächeninhalt der Seitenfläche für mehr als drei Dimensionen entspricht* (Berliner Abh., 1866); Rudel, *Von den Elementen und Grundgebilden der synthetischen Geometrie* (Bamberg, 1877); Pilgrim, *Ueber die Anzahl der Theile in welche ein Gebiet* k^{ter} *Stufe (Grassmann) durch* n *Gebiete* $(k-1)^{ter}$ *Stufe getheilt werden kann* (Zeitschr. f. Math., 24, 1879); Hoppe, *Einfachste Sätze aus der Theorie der mehrfachen Ausdehnungen* (Arch. der Math., 64, 1879), *Ueber den Winkel von* n *Dimensionen* (Id., 66, 1881), *Drei Sätze für Inhaltsberechnung in der mehrdimensionalen Geometrie* (Id., 69, 1883); *Erweiterung zweier Sätze auf* n *Dimensionen* (Id., II, 6, 1887), *Erweiterung der Sätze über Tetraeder dessen Höhen sich in einem Punkte schneiden, auf mehr Dimensionen* (Id., 9, 1890) e *Ueber Congruenze und Symetrie der Gebilden von beliebig vielen Dimensionen* (Ivi); Study, *Ueber Distanzenrelationen* (Zeitschr. f. Math., 27, 1882); Schlegel, *Quelque théorèmes de géométrie à* n *dimensions* (Bull. S. M. F., 10, 1882).

---

(1) La nota di T. P. Hall, *The Projection of Fourfold Figures upon a Three-flat* (Am. Journ., 15, 1893) ha delle analogie con quelle or citate dello Schoute.

(2) Cfr.: Harmuth, *Ueber polydimensionale Zahlenfiguren* (Arch. der Math., 69, 1882), e Schlegel, *Sur une méthode pour représenter dans le plan les cubes magiques à* n *dimensions* (Bull. S. M. F., 20, 1892).

Ueber die verschiedenen Formen von Gruppen, welche r *beliebige Punkte im* n*-dimensionalen Raum bilden können* (Arch. der Math., II, 10, 1891), e *Ueber congruente Raumteilungen* (Ivi), e *On the Problem of the Minimum Sum of the Distances of a Point from Given Points* (Bull. of Am. Math. Soc., II, 1, 1894-95); Mehmke, *Ausdehnung einiger elementarer Sätze über das ebene Dreieck auf Räume von beliebig viele Dimensionen* (Arch. der Math., 70, 1883); R. Müller, *Ueber eine gewisse Gleichung 2n^ten Grades, deren Specialfälle* n = 2 *und* n = 3 *beim Normalenproblem der Ellipse und des Ellipsoides auftreten* (Diss. Berlin, 1884); Cassani, *Geometria pura euclidea degli spazii superiori* (Atti Ist. Ven., VI, 1 e 2, 1885), *Geometria pura euclidiana ad* n *dimensioni* (Giorn. di Mat., 23, 1885), *Sugli angoli degli spazii lineari* (Lincei Rend., IV, 1, 1885), *Gli angoli degli spazii lineari* (Ivi), *Sulla geometria pura euclidiana ad* n *dimensioni* (Att. Ist. Ven. VII, 5, 1893-94), e *Sugli angoli degli spazi lineari in un ambiente a più dimensioni* (Ivi); Castelnuovo, *Angoli di due spazii contenuti nello spazio a* n *dimensioni* (Atti Ist. Ven., VI, 3, 1885); E. Cesàro, *Alcune misure negli iperspazii* (Giorn. di Mat., 24, 1886; cfr. *Mathematical Papers by W. K. Clifford,* London, 1882, p. 605 e seg.); Rahnsen, *Sur quelques propriétés des déterminants, appliquées à une question de géométrie à* n *dimensions* (Ann. de l'Éc. Pol. de Delft, 4, 1888), ove sono studiate le figure congruenti o simmetriche negli spazi lineari qualunque.

6. Alle considerazioni precedenti se ne possono riattaccare altre che hanno attinenza con le indagini, il cui scopo è la spiegazione matematica dei fatti naturali.

La più antica a noi nota è l'osservazione che segue, fatta nel 1827 da Möbius (1): supposta l'esistenza di una quarta dimensione, scompare una differenza inesplicabile fra il piano e lo spazio ordinario, la quale consiste in ciò che, mentre nel piano due figure di un piano simmetriche rispetto ad una retta possono portarsi a coincidenza, altrettanto non può farsi per due figure solide simmetriche rispetto ad un piano; questa disuguaglianza di comportamento non esiste più ove si ammetta che lo spazio nostro possa ruotare attorno ad un suo piano invadendo

(1) V. la chiusa del § 140 dell'opera *Der barycentrische Calcul.*

uno spazio a quattro dimensioni per poi ritornare alla posizione primitiva, come nello spazio ordinario si ammette la rotazione di un piano attorno ad una sua retta.

Similmente Klein fece notare (Math. Ann., 9, 1876, p. 478, ultimo capoverso) che, passando per lo spazio a quattro dimensioni, una curva intrecciata può trasformarsi in altra che non lo sia, osservazione questa che si trova svolta ed illustrata nelle note seguenti: Hoppe, *Gleichung der Curve eines Bandes mit unauflosbaren Knoten nebst Auflösung in vierter Dimension* (Arch. der Math., 64, 1879), *Bemerkung betreffend die Auflösung eines Knotes in 4er Dimension* (Id., 65, 1880), Durège, *Ueber die Hoppe'sche Knotencurve* (Wiener Ber., 1880), e Schlegel, *Ueber die Auflösung des Doppelpunktes einer ebenen Curve im dreidimensionalen Raume, und ein mit dieser Curve zusammenhängendes Problem der Mechanik* (Zeitschr. f. Math., 28, 1883).

Inoltre S. Newcomb, prendendo le mosse dall'osservazione fatta da Zöllner che una quarta dimensione renderebbe possibili certi movimenti che altrimenti sarebbero inconcepibili, ha mostrato, nella *Note on a Class of Transformations which Surfaces may undergo in Space of more than Three Dimensions* (Am. Journ., 1, 1878), che, ove esistesse una quarta dimensione, si potrebbe trasformare una superficie materiale in modo che la faccia interna divenisse esterna e viceversa.

Finalmente il Veronese fece rilevare (nella sua Prolusione che tratta *Dei principali metodi in geometria,* Padova, 1882) la possibilità di estrarre un corpo da un ambiente chiuso passando per lo spazio a quattro dimensioni.

Questi risultati incoraggiarono alcuni scienziati a spiegare certi altri fenomeni coll'ipotesi dell'esistenza di uno spazio a quattro dimensioni nel quale il nostro fosse contenuto. Ad es. il Clifford, ammettendo che questo fosse di curvatura variabile, potè spiegarne alcuni di luce e magnetismo dei quali prima non si riusciva a rendersi ragione (1); in modo analogo lo Zöllner si sforzò di giustificare la conservazione dell'energia (2); e più re-

---

(1) Così asserì il Sylvester nel discorso tenuto nel 1869 all'Associazione Britannica pel progresso della scienza. V. anche: Clifford, *Il senso comune nelle scienze esatte* (Milano, 1886), p. 255 e seg.

(2) *Ueber die Natur der Kometen* (Leipzig, 1872), p. 305-312.

centemente R. de Saussure compose una nuova *Théorie des phénomènes physiques et chimiques* (Archives des Sciences naturelles de Genève, 1891): dello stesso ordine è lo scritto di data meno recente del Bresch *Der Chemismus im Lichte mehrdimensionalen Raumanschauung* (Leipzig, 1882). Devo aggiungere anche l'indicazione dei rapporti che si vollero stabilire fra lo spiritismo e la teoria che ci occupa? (1).

7. Come la geometria cartesiana diede origine alla geometria metrica degli spazî lineari qualunque, così la geometria analitico-projettiva generò la geometria projettiva degli spazî a quantesivogliano dimensioni, avente dal canto suo come proprio fondamento analitico la teoria delle forme algebriche.

Il più antico lavoro a noi noto in quest'ordine d'idee è quello del Cayley intitolato *Analytical Researches connected with Steiner's Extension of Malfatti's Problem* (Phil. Trans., 162, 1852), il cui ultimo paragrafo contiene lo sviluppo dell'osservazione seguente: " several of the formulae of the preceding sections of this memoir apply to any number of variables ". Più espliciti furono lo Schläfli nel proporre una *Erweiterung des Satzes, dass zwei polare Dreiecke perspectivisch liegen, auf eine beliebige Zahl von Dimensionen* (Journ. f. Math., 65, 1866), il Beltrami nello scrivere l'esercitazione analitica *Su alcuni teoremi di Feuerbach e di Steiner* (Bologna Mem., III, 5, 1875), C. Segre nella nota *Sur les invariants simultanés de deux formes quadratiques* (Id., 24, 1884), G. Loria in quelle *Su una generalizzione delle proprietà involutorie del quadrangolo e del quadrilatero completi* (Rend. Ist. Lomb., II, 18, 1885), *Sulle curve razionali normali in uno spazio a* n *dimensioni* (Giorn. di Mat., 26, 1888) e *Intorno alle curve razionali d'ordine* n *dello spazio a* n — 1 *dimensioni* (Palermo Rend., 2, 1888), ed il Voss nel suo studio *Ueber Poncelet-Zeuthen'sche Polygone, welche einem Gebilde zweiten Grades eingeschrieben sind* (Math. Ann., 26, 1886).

Ma il lavoro più cospicuo in quest'indirizzo è la grande memoria del Nöther *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen* (Math. Ann., 2,

---

(1) Essi trovansi descritti al termine della memoria dello Schlegel *Ueber Entwickelung und Stand der* n-*dimensionalen Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der vierdimensionalen* (Abh. der Leopoldinischen Akademie, 22, 1886).

1870), destinata a servire di fondamento ad una teoria delle corrispondenze univoche fra due spazî lineari qualunque; ad essa fanno degno riscontro le *Recherches de géométrie à* n *dimensions* dell'Halphen (Bull. S. M. F., 2, 1873), ove è estesa a varietà qualunque la rappresentazione monoidale proposta da Cayley per le curve gobbe (v. Cap. III, n. 2), ed è dimostrato l'importante teorema: „ se si considerano in uno spazio a d dimensioni due varietà, una d'ordine μ e dimensione m, l'altra d'ordine ν e dimensione n, la loro intersezione è una varietà d'ordine $\mu\nu$ e dimensione $m+n-d$, purchè sia $m+n \geqq d$ e le due varietà non abbiano comune una varietà d'ordine $\geqq m+n-d+1$ „ (1).

Grazie ai temi che trattano citeremo qui le note di S. Kantor *Sur les transformations linéaires successives dans le même espace à* n *dimensions* (Bull. S. M. F., 8, 1880), *Sopra le trasformazioni quadratiche periodiche nello spazio a* n *dimensioni* (Rend. Ist. Lomb., II, 27, 1894) e *Sopra le caratteristiche delle trazformazioni quadratiche dello spazio a* r *dimensioni* (Ivi), e l'articolo di J. Brill *On certain general Properties of Points Transformations* (Quart. Journ., 27, 1895), nel quale è estesa ad uno spazio lineare qualunque una proposizione nota per il piano; uno scopo analogo ha la nota del Berzolari, *Sulle corrispondenze algebriche* $[M_1, M_2, \ldots, M_r]$ *fra* r *punti di uno spazio lineare di quantesivogliano dimensioni* (Lincei Rend., V, 4, 1895_2).

8. Che però la geometria projettiva degli spazî superiori si possa trattare anche senza il sussidio costante di coordinate, osservò per il primo il Cayley fin dal 1846 nella celebre sua nota *Sur quelques théorèmes de la géométrie de position* (Journ. f. Math., 31), ove è messo in luce quanto conveniente sia considerare gli spazî a più dimensioni quando si vogliano determinare le proprietà delle configurazioni (2). Questa stessa idea geniale si ritrova, con tutti gli sviluppi che comporta, nella I sezione della fondamentale memoria di G. Veronese *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens* (Math. Ann.,

(1) V. anche: Nöther, *Zur Eliminationstheorie* (Math. Ann., 11, 1877).
(2) Si vegga tutto il brano del § I che segue il VII teorema.

19, 1882) (1), dalla quale veramente si può far datare l'erezione a dottrina individuale della geometria projettiva sintetica degli iperspazî (2). Di tale memoria la II sezione concerne le corrispondenze projettive (collineari e reciproche) fra due iperspazî; la III le quàdriche a quantesivogliano dimensioni (3), la IV insegna ad estendere a spazî lineari qualunque le relazioni fra le caratteristiche di una curva che, pel piano scoprì Plücker (v. pag. 46) e per lo spazio Cayley (v. pag. 129) (4); ivi inoltre l'autore svolse delle ricerche i cui germi furono dal Clifford consegnati nell' importantissimo lavoro *On the Classification of Loci* (Phil. Trans., 168, 1878), nel quale le considerazioni sintetiche e le applicazioni delle funzioni trascendenti si alternano per rivelare la generalizzabilità di molti teoremi noti per le curve dello spazio nostro (5). L'ultima sezione del lavoro del Veronese insegna la generazione di curve, superficie, ecc., mediante sistemi projettivi, e la illustra sopra molti esempî.

Come complementi di questa memoria sono da riguardarsi la nota dello stesso matematico *Sopra la geometria descrittiva a quattro dimensioni* (Atti Ist. Ven., V, 8, 1882), ove il noto metodo

---

(1) Cfr. anche l'articolo del medesimo autore *Alcuni teoremi sulla geometria a* n *dimensioni* (Lincei Trans., III, 5, 1880-81).

(2) Dalla or citata sezione della memoria del Veronese deriva la *Dimostrazione della formola:*

$$\binom{p}{r-1}+\binom{q-1}{1}\binom{p}{r}+\binom{q-1}{2}\binom{p}{r+1}+\binom{q-1}{3}\binom{p}{r+2}+\ldots=\binom{p+q-1}{q+r-2}$$

mediante la geometria a n *dimensioni* esposta dallo stesso geometra in Atti Ist. Ven., VI, 2, 1883-84.

(3) Nella determinazione degli spazî lineari contenutî in una di esse, il Veronese trovò valido aiuto nella nota del Cayley: *On the Superlines of a Quadric Surface in Five-dimensional Space* (Quart. Journ., 12, 1873).

(4) V. anche la nota preliminare intitolata *Die Anzahl der unabhängigen Gleichungen, die zwischen den allgemeinen Charakteren einer Curve im Raume von* n *Dimension stattfinden* (Math. Ann., 18, 1881).

(5) Notiamo in particolare, nel capitolo sulle curve razionali d'ordine *n* dello spazio a *n* dimensioni, l'estensione della proprietà di ogni conica di dar luogo ad un sistema polare e di ogni cubica di dar luogo ad un sistema nullo; la notiamo per osservare che essa fu ritrovata assai dopo da P. Cassani, che la fece conoscere nella nota *Un teorema generale sulle linee normali degli spazi dispari* (Lincei Rend., IV, 2, 1886_1): cfr. anche Brambilla, *Intorno alle curve razionali in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (Rend. Ist. Lomb., II, 19, 1886).
Un giudizio sulla memoria di Clifford meno favorevole dell'ordinario leggesi nella nota a pag. 547 del già citato (v. pag. 47) *Bericht* di Brill e Nöther.

della projezione centrale viene esteso agli spazî lineari di quattro dimensioni (altrettanto si potrebbe evidentemente fare per spazî superiori), e quella che tratta *Di una costruzione della superficie del 4° ordine dotata di una conica doppia* (Atti Ist. Ven., VI, 2, 1884), ove tale superficie è considerata per proiezione della intersezione di due quàdriche dello spazio a quattro dimensioni (1), nonchè il lungo e assai notevole lavoro intitolato *La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario* (Lincei Mem., III, 19, 1884) (2).

9. Numerose ed importanti sono le investigazioni che derivano dagli scritti or citati dal Veronese e che ne completano (talora anzi ne correggono) i risultati.

Così un complemento alle generalità è offerto dalla nota del Bertini *Sulla geometria degli spazii lineari in uno spazio ad* n *dimensioni* (Rend. Ist. Lomb., II, 19, 1886), e da *Alcune considerazioni elementari sull'incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni* (Palermo Rend., 2, 1888) del Segre; dalla nota di questo geometra *Sur un théorème de la géométrie à* n *dimensions* (Math. Ann., 30, 1887), dalla *Determinazione del numero degli spazii che segano piu rette in uno spazio a* n *dimensioni* (Lincei Rend., IV, 5, 1889_2) fatta dal Castelnuovo, e dalle osservazioni che menzionammo nella chiusa del n. 3 del Cap. VII (pag. 214).

Quali continuazioni della II sezione sono del pari da ritenersi i seguenti notevoli lavori: C. Segre, *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (Lincei Mem., III, 19, 1884; cfr. *Teorema sulle relazioni tra una coppia di forme bilineari e la coppia delle loro forme reciproche,* Giorn. di Mat., 22, 1884), *Sugli spazii fondamentali di un'omografia* (Lincei Rend., IV, II, 1886_1) e *Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale e particolarmente su*

---

(1) È il medesimo punto di partenza scelto dal Segre nella sua memoria in Math. Ann., 24, che citammo a pag. 108 e che qui ci corre l'obbligo di ricordare come appartenente pel metodo, se non pei risultati, al ramo di geometria che or ci occupa.

(2) La figura ivi studiata s'incontra in moltissime ricerche, e si suole da molti con ragione chiamare " superficie di Veronese ".

quelle dello spazio ordinario considerate nella geometria della retta (Torino Mem., II, 37, 1885); Aschieri, *Sulla trasformazione omografica generale di uno spazio lineare di specie qualunque* (Rend. Ist. Lomb., II, 18, 1885), e *Delle corrispondenze lineari reciproche in uno spazio lineare di specie qualunque* (Id., 19, 1886); Bertini, *Le omografie involutorie in uno spazio lineare a qualsivoglia numero di dimensioni* (Ivi), *Costruzione delle omografie di uno spazio lineare qualunque* (Id., 20, 1887), e *Sulla scomposizione di certe omografie in omologie* (Torino Atti, 22, 1887); Bordiga, *Corrispondenza di polarità negli spazii superiori* (Atti Ist. Ven., VI, 3, 1886); Predella, *Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni* (Ann. di Mat., II, 17, 1889), e *Sulla teoria generale delle omografie* (Torino Atti, 27, 1891-92); Castelnuovo, *Su certi gruppi associati di punti* (Palermo Rend., 3, 1889); Enriques, *Alcune proprietà dei fasci di omografie negli spazii lineari ad* n *dimensioni* (Lincei Rend., IV, 6, 1890_2), *Le omografie cicliche negli spazii ad* n *dimensioni* (Giorn. di Mat., 30, 1892), e *Le omografie armoniche negli spazii lineari ad* n *dimensioni* (Ivi); Waelsch, *Ueber binäre Formen und die Correlationen mehrdimensionalen Räume* (Monatshefte, 6, 1895).

Alla III sezione della memoria del Veronese si collegano strettamente lo *Studio* del Segre *sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (Torino Mem., II, 36, 1884 (1); le *Ricerche* dello stesso *sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque* (Torino Atti, 19, 1884), quelle del Bertini *Sui fasci di quadriche in uno spazio ad* n *dimensioni* (Lincei Rend., IV, 2, 1886_2), finalmente quelle di P. del Pezzo *Sulle quadriche ad* (n — 1) *dimensioni polari reciproche di se stesse rispetto ad un'altra* (Napoli Rend., 24, 1885) e sopra *Alcuni sistemi omaloidici di quadriche nello spazio di quattro dimensioni* (Id., III, 1, 1895).

Anche la nota del Segre *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque* (Torino Atti, 19, 1884) — ove le rigate di genere zero vengono classificate e rappresentate in modo ana-

(1) Ivi in particolare sono determinati esattamente tutti gli spazî lineari di una quadrica di quantesivogliano dimensioni. Si noti che anche il Segre, come il Veronese, fece ampio uso della proiezione stereografica che il Klein aveva dianzi generalizzato nella sua memoria (da noi citata a p. 305) dei Math. Ann., 5.

logo a quello che Armenante e Clebsch (v. pag. 248) avevano insegnato per lo spazio ordinario — è un importantissimo complemento delle prime ricerche di Veronese (1). Le indagini ivi condotte a buon termine furono poi generalizzate dall'autore in due direzioni differenti; in primo luogo, come analoghe delle rigate (serie semplicemente infinite di rette) è lecito riguardare le serie semplicemente infinite di spazî lineari, e in secondo luogo si possono considerare le rigate di genere superiore a 0; alla prima generalizzazione si riferisce la nota *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani* (Torino Atti, 21, 1886), e *Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazii* (Lincei Rend., IV, 3, 1887_2); alla seconda le *Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine* (Torino Atti, 21, 1886), e le *Recherches générales sur les courbes et les surfaces reglées algébriques* (Math. Ann., 30, 1887, e 34, 1889) (2).

Anche la teoria delle curve degli spazî superiori (3) venne coltivata dopo Veronese; lo provano gli scritti seguenti: Fine, *A Theorem respecting the Singularities of Curves of multiple Curvature* (Am. Journ. 1887); Segre, *Sulle curve normali di genere* p *dei varii spazii* (Rend. Ist. Lomb., II, 21, 1888); Castelnuovo, *Geometria sulle curve ellittiche* (Torino Atti, 24, 1888), *Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere* (Lincei Rend., IV, 5, 1890_2), *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* (Torino Atti, 24, 1889), *Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche* (Palermo Rend., 3, 1889), *Osservazioni sopra le serie irrazionali di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (Lincei Rend., IV, 7, 1891_2), e *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (Palermo Rend., 7, 1893); Bertini, *Intorno ad alcuni teoremi della geometria sopra una curva algebrica* (Torino

---

(1) Cfr. anche Bordiga, *Rappresentazione piana della superficie rigata normale* (Atti Ist. Ven., VI, 4, 1886).

(2) V. le note preliminari: *Nuovi risultati sulle rigate algebriche di genere qualunque* (Torino, Atti, 22, 1887), e *Intorno alla geometria su una rigata algebrica* (Lincei Rend., IV, 3, 1887_2).

(3) Fra le applicazioni di tale teoria va notato lo studio *Intorno ai punti singolari delle curve algebriche* del del Pezzo (Napoli Rend., II, 6, 1893), ove tali punti sono ottenuti mediante opportune proiezioni.

Atti, 26, 1890); G. Fano, *Sopra le curve di dato ordine e dei massimi generi in uno spazio qualunque* (Torino Mem., II, 44, 1893).

10. I lavori di quest'ultima categoria, assieme ad altri del Segre, del Bertini, del Castelnuovo e dell'Enriques che nominammo altrove, sono ingredienti essenziali di una nuova diramazione della geometria, costituita dalle ricerche intorno alla geometria di una serie semplicemente infinita di punti di uno spazio lineare qualunque, e comprendente in particolare la teoria delle serie lineari ivi contenute, delle involuzioni, delle corrispondenze fra gli elementi di un tale ente, ecc. Essi sono compendiati nelle memorie del Bertini e del Segre che citammo a pag. 54, e preparano una " geometria sull'ente algebrico a quantesivogliano dimensioni ", nella quale non si tiene alcun conto del numero delle dimensioni dello spazio ambiente, e si dà importanza meno alle proprietà projettive che a quelle le quali sono invarianti di fronte a trasformazioni birazionali (1).

Qui intanto ci corre l'obbligo di avvertire che nella letteratura matematica odierna non mancano le ricerche sulle varietà non lineari e di dimensione maggiore di uno degli spazî superiori. Basti infatti ricordare, oltre i frammenti *Sullo spazio di quattro dimensioni* e *Sulla teoria degli spazii a più dimensioni* inseriti fra le *Memorie di geometria di Ettore Caporali*, gli scritti di P. del Pezzo, *Sulle superficie d'ordine* n *immerse nello spazio di* n + 1 *dimensioni* (Napoli Rend., 24, 1885), *Sugli spazii tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni* (Id., 25, 1886), *Sulle proiezioni di una superficie e di una varietà dello spazio ad* n *dimensioni* (Ivi), *Intorno ad una proprietà fondamentale delle superficie e delle varietà immerse negli spazii a più dimensioni* (Id., II, 1, 1887), e *Sulle superficie del* n^{mo} *ordine immerse nello spazio di* n *dimensioni* (Palermo Rend., 1, 1884-87); poi quelli di E. H. Moore, *Extensions of*

(1) Se di questo generalissimo ramo di scienza non abbiano tessuta la storia gli è che desso è ora in istato di formazione; se non ne abbiamo descritto il successivo sviluppo in un capitolo a sè — nel quale avrebbe dovuto trovar posto molto di quanto esponemmo nei Cap. II, III e IV — fu per meglio uniformarci all'uso comune, epperò facilitare al lettore di orizzontarsi nel nostro racconto: ma non ci dissimuliamo che il sistema opposto avrebbe meglio corrisposto alla natura intima delle investigazioni di cui è parola.

certain Theorems of Clifford and of Cayley on the Geometry of n *Dimensions* (Trans. of the Connecticut Academy, 7, 1885), e *Algebraic Surfaces of which every Plane Section is Unicursal in the Light of* n- *Dimensional Geometry* (Am. Journ., 10, 1887); finalmente quello di C. Rodenberg, *Ableitung der Polareigenschaften algebraischer Mannigfaltigkeiten auf darstellend-geometrischem Wege* (Math. Ann., 26, 1885) (1).

Una speciale ed importante categoria di varietà venne considerata contemporaneamente dal Segre e dal Castelnuovo; i risultati ottenuti a tal proposito dal primo si leggono nella nota *Sulla varietà cubica con dieci punti doppii dello spazio a quattro dimensioni* (Torino Atti, 22, 1887) e nella più estesa memoria *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario* (Torino Mem., II, 39, 1888), quelli a cui pervenne il secondo nei due scritti: *Su una congruenza del 3° ordine e 6ª classe dello spazio a quattro dimensioni e sulle sue proiezioni nello spazio ordinario* (Atti Ist. Ven., VI, 5, 1888) e *Sulle congruenze del 3° ordine dello spazio a quattro dimensioni* (Id., 6, 1889) (2).

Ancora: il Segre nella nota intitolata *Un'osservazione sui sistemi di rette degli spazii superiori* (Palermo Rend., 2, 1888) considerò i sistemi di ∞^{n-1} rette dello spazio a *n* dimensioni trovandone le proprietà analoghe alle proprietà focali delle congruenze dello spazio ordinario, mentre il Castelnuovo colle sue *Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni*

---

(1) Si può aggiungere: Brambilla, *Un teorema nella teoria delle polari* (Torino Atti, 22, 1887); Ascione, *Sulla Hessiana di una varietà dello spazio a quattro dimensioni* (Giorn. di Mat., 31, 1893); Segre, *Sulla forma Hessiana* (Lincei Rend., V, 4, 1895_2), e *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche* (Torino Atti, 31, 1896).

Avvertasi ancora che i metodi del Veronese furono applicati dal Bordiga nei seguenti lavori (ed in altri che si trovano da noi citati altrove): *Studio generale della quartica normale* (Atti Ist. Ven., VI, 4, 1886); *Di alcune superficie del 5° e del 6° ordine che si deducono dallo spazio a sei dimensioni* (Ivi); *La surface du 6ᵉ ordre avec six droites* (C. R., 102, 1886); *Nouveaux groupes de surfaces à deux dimensions dans les espaces à* n *dimensions* (Ivi); *La superficie del 6° ordine con 10 rette nello spazio* R_4 *e le sue proiezioni nello spazio ordinario* (Lincei Mem., IV, 3, 1887), e *Di una certa superficie del 3° ordine* (Atti Ist. Ven., VI, 5, 1888).

(2) V. anche Bordiga, *Di una certa congruenza del terzo ordine e della sesta classe dello spazio ordinario* (Lincei Rend., IV, 6, 1890_1) e *Congruenza del 4° ordine della 2ª classe nello spazio a quattro dimensioni* (Atti Ist. Ven., VII, 5, 1894).

(Atti Ist. Ven., VII, 2, 1891) gettava le basi della geometria analitica della varietà composta dalle rette di uno spazio a quattro dimensioni; un tema congenere ha la memoria del Bordiga *Dei complessi in generale nello spazio a quattro dimensioni ed in particolare di alcuni di primo ordine. Loro proiezione e rappresentazione nello spazio ordinario* (Id., VI, 6, 1888), di cui alcune proposizioni abbisognano di correzioni; a questi lavori si può avvicinare lo *Studio su alcuni sistemi di rette considerati come superficie dello spazio a cinque dimensioni* (Ann. di Mat., II, 21, 1893) di G. Fano.

Anche altre ricerche della ordinaria geometria furono estese a spazî lineari qualunque. Così, per iscopi analitici, il Bianchi, in un lavoro *Ueber die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung* (Math. Ann., 17, 1880; cfr. F. Meyer, *Ueber die elliptische Curve fünfter Ordnung des Raumes von vier Dimensionen,* Id., 26, 1886), e più generalmente il Klein, nella memoria *Ueber die elliptischen Normalcurven der* N^{ten} *Ordnung und zugehörige Modulfunctionen der* N^{ten} *Ordnung,* (Leipziger Abh., 1885), si occuparono delle curve ellittiche mentre W. Wirtinger, lavorando in analoga direzione, arrivò a scrivere un notevole lavoro *Ueber eine Verallgemeinerung der Theorie der Kummer'schen Fläche und ihrer Beziehungen zu den Thetafunctionen zweier Variabeln* (Monatshefte, 1, 1890).

Una notevole applicazione analitica della geometria a più dimensioni è svolta nelle note di G. Fano *Sopra alcune considerazioni geometriche che si collegano alla teoria delle equazioni differenziali lineari* (Lincei Rend., V, 4, 1895_1), *Sopra certe curve razionali di uno spazio qualunque e sopra certe equazioni differenziali lineari, che con queste curve si possono rappresentare* (Ivi), *Sulle equazioni differenziali lineari del 4° ordine che definiscono curve contenute in superficie algebriche* (Ivi), e *Sulle equazioni differenziali lineari d'ordine qualunque, che definiscono curve contenute in superficie algebriche* (Ivi).

Si è pure cominciato a trattare le questioni di forma analoghe a quelle di cui ci occupammo nel Cap. VI: gli scritti di F. Klein *Ueber Realitätsverhältnisse im Gebiete der Abel'schen Functionen* (Götting. Nachr., 1892), e *Ueber Realitätsverhältnisse bei der einem beliebigen Geschlechte zugehörigen Normalcurve der* φ (Math. Ann., 42, 1892) rappresentano forse un primo passo

verso un campo d'indagini fecondissimo ed importante; un altro la nota di V. Eberhard *Ein Satz aus der Topologie* (Math. Ann., 36, 1890), ove i risultati esposti da Steiner nella nota *Einige Gesetze über die Theilung der Ebene und des Raumes* (Journ. f. Math., 1, 1826) e da S. Roberts in quella *On the Figure formed by the Intercepts of a System of Straight Lines in a Plane, and on Analogous in Space of Three Dimensions* (Proc. L. M. S., 19, 1888) ricevettero una ampia ed importantissima generalizzazione.

La rappresentazione delle forme binarie sulle curve razionali fu estesa alle curve degli spazî superiori, come si apprende dagli scritti di E. Waelsch *Ueber eine geometrische Darstellung in der Theorie der binären Formen* (Wiener Ber., 100, 1891) e *Zur Construction der Polargruppen* (Ivi), e di L. Berzolari *Sulle curve razionali di uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (Ann. di Mat., II, 21, 1893). Delle ricerche di geometria numerativa negli spazî superiori abbiamo già parlato nel n. 11 del Cap. IX; qui aggiungiamo come alcuni risultati dello Schubert siano stati confermati da O. Landsberg nelle sue *Untersuchungen über die Gruppen einer linearen fünffachen Mannigfaltigkeit* (Diss. Breslau, 1889).

Inoltre la geometria metrico-projettiva degli spazî superiori venne ampiamente trattata da E. d'Ovidio nella memoria intitolata *Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quantesivogliano dimensioni e di curvatura costante* (Lincei Mem., III, 1, 1876; cfr. anche Math. Ann., 12, 1877), ove è abilmente sfruttato il metodo di Clebsch (1) per determinare mediante coordinate gli spazî lineari subordinati ad uno spazio lineare qualsivoglia (2). Recentemente G. Fontené, in un opuscolo su *L'hyperspace à* (n — 1) *dimensions* (Paris, 1892), ha generalizzato il punto di partenza, epperò i risultati del d'Ovidio: mentre questi suppone che nello spazio a n dimensioni considerato una medesima quàdrica sia l'assoluto (v. pag. 294) de' punti e l'assoluto degli spazî a $n-1$ dimensioni, l'or citato geometra francese suppone che questi due assoluti siano, il primo il luogo dei punti che in

---

(1) V. la memoria *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie* (Götting. Abh., 17, 1872).

(2) Ad una speciale questione di geometria metrico-projettiva è consacrata la già citata nota di G. Loria *Sul concetto di volume in uno spazio lineare qualunque* (Giorn. di Mat., 26, 1888).

una correlazione generale stanno sugli spazî corrispondenti, il secondo l'inviluppo di questi spazî.

Da ultimo la ricerca di un sistema di postulati indipendenti che serva a caratterizzare pienamente uno spazio lineare qualunque, sì che se ne possa dedurre la rappresentazione dei punti di questa col mezzo di coordinate, venne consigliata come importante dal Segre (Riv. di Mat., 1, 1891, p. 60-61), e venne compiuta contemporaneamente dall'Amodeo, nella nota intitolata *Quali possono essere i postulati fondamentali della geometria projettiva di un* S_r (Torino Atti, 26, 1891; cfr. anche l'articolo *Sulla linearità delle varietà ad un numero qualunque di dimensioni,* Riv. di Mat., 2, 1892), e da G. Fano, nel lavoro *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva di uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni* (Giorn. di Mat., 30, 1892); recentemente essa venne ripresa dal Pieri il quale dedicò ad essa la nota sopra *Un sistema di postulati per la geometria projettiva astratta degli iperspazii* (Riv. di Mat., 6, 1896). Argomenti affini trattano le note dello Zindler, *Nachweis linearer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension in unserem Raume; lineare Complexe und Strahlensysteme in denselben* (Wiener Ber., 101, 1892), e *Synthetische Gewinnung geometrische linearer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension* (Journ. f. Math., 111, 1893), e gli *Appunti di geometria ad* n *dimensioni* di P. del Pezzo (Giorn. di Mat., 31, 1893). Del resto un'esposizione metodica degli elementi della geometria ad *n* dimensioni è uno dei principali intenti dei già citati *Fondamenti di geometria* del Veronese.

11. I procedimenti seguiti nei lavori ora ricordati per giungere agli spazî comunque estesi sono o essenzialmente analitici, oppure hanno come fondamento l'ipotesi che al di fuori dell'ordinario nostro spazio a tre dimensioni esistano altri punti. Ma, già da tempo, Plücker ha osservato come l'ordinaria geometria guidi naturalmente a concepire varietà a quantesivogliano dimensioni. Basta infatti scegliere come elemento del nostro spazio una figura, per definire la quale occorra un numero di coordinate superiore a tre, perchè lo spazio medesimo ci appaia come una varietà avente più di tre dimensioni; così, ne avrà tre se si prende il punto o il piano, quattro se si sceglie la retta o la sfera, sei se si preferisce il cerchio, otto o nove se si assume per ele-

mento la conica o la quàdrica, e così via. Questo concetto è meno astratto dei precedenti, epperò meno di essi presta il fianco alla critica. Ad esso deve la vita la geometria della sfera che, specialmente per opera del Lie, già si è costituita a dottrina autonoma; esso diede origine anche alla geometria dello spazio di cerchi di cui già esistono buoni elementi (1); ed è da presumersi conduca presto alla geometria dello spazio di coniche, della quale il fondamento analitico si trova nelle note di W. Spottiswoode, *On the Eighteen Coordinates of a Conic in Space* (Brit. Ass., 1880), e *On the Twenty-one Coordinates of a Conic in Space* (Proc. L. M. S., 10, 1889), della quale sono non ispregievoli preliminari le note del Montesano *Sopra un sistema lineare di coniche nello spazio* (Torino Atti, 27, 1892), e *Su i varii tipi di conseguenze lineari di coniche dello spazio* (Napoli Rend., III, 1, 1895), e quella del Pieri *Sopra alcune congruenze di coniche* (Id., 28, 1893).

Lo stesso concetto si trova applicato nella memoria di Cayley *On Curves which Satisfy given Conditions* già citata a pag. 265 ed in quella del Salmon nominata a pag. 267; esso si ritrova, esposto ancora più esplicitamente dallo Spottiswoode nelle note *Sur la représentation des figures de géométrie à* n *dimensions par les figures corrélatives de géométrie ordinaire* (C. R., 71, 1875) e *Nouveaux exemples de la représentation, par des figures de géométrie, des conceptions analytiques de géométrie à* n *dimensions* (Ivi); l'or menzionato geometra non solo ritrovò il metodo di Clebsch (cfr. pag. prec.) per rappresentare mediante coordinate gli spazi lineari contenuti in un dato spazio (2), ma scrisse un lavoro *On the 48 Coordinates of a Cubic Curve in Space* (Proc. R. S., 31, 1881), di cui dovrà tener conto il futuro fondatore della geometria dello spazio delle cubiche gobbe. Nè si può tacere come parecchi dei lavori del Reye sui sistemi di superficie (3) sem-

(1) Koenigs, *Contribution à la théorie du cercle dans l'espace* (Toulouse Ann., 2, 1888); Cosserat, *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace cerclé* (C. R., 106, 1888), *Sur l'emploi du complexe linéaire de droites dans l'étude des système linéaires de cercles* (Ib.), e *Sur le cercle considéré comme élément générateur de l'espace* (Toulouse Ann., 3, 1889).

(2) V. la *Note sur la représentation algébrique des lignes droites dans l'espace* (C. R. 76, 1873).

(3) V. specialmente la nota *Ueber lineare Systeme und Gewebe von algebraischen Flächen* (Journ. f. Math., 82, 1877), nonchè quelle più recenti *Ueber lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenbüschel und collinearer Bündel oder Räume* (Id. 104, 106 e 108, 1889-91).

brano scritti per illustrare con esempî svariati e convincenti le idee di Plücker. D'altronde, non si può forse dire che questi abbia avuto un precursore in Lagrange, quando si ricorda avere questo grande geometra asserito (1) che " on peut regarder la mécanique comme une géométrie à quatre dimensions, et l'analyse mécanique comme une extension de l'analyse géométrique "?

(1) *Théorie des fonctions analytiques* (Paris, Parairial an V, p. 223).

CAPITOLO XII.

Epilogo.

E qui giudico opportuno por termine alla rassegna che mi ero proposta; non già che io abbia esaurito l'esame di tutti i lavori interessanti che apparvero in questi ultimi anni, ma

> Io non posso ritrar di tutti appieno;
> Perocchè sì mi caccia il lungo tema,
> Che molte volte al fatto il dir vien meno.

In verità molte ed importanti categorie d'investigazioni matematiche non si trovarono sul nostro cammino, perchè non seppero trovar posto in alcuno dei gruppi nei quali trovansi distribuiti i lavori di cui ho discorso.

Così non potei arrestarmi sulle indagini interessanti che ebbero per punto di partenza la trigonometria (1), nè trattenermi sopra la teoria delle coordinate projettive che, scoperte da Chasles, assoggettando ad una trasformazione omografica le ordinarie coordinate cartesiane (2), vennero ottenute direttamente da Staudt (v. il § 29 dei *Beiträge zur Geometrie der Lage*) e più completamente dal Fiedler (3), il quale inoltre mise in chiara luce come la maggior parte dei sistemi di coordinate noti ed altri analoghi siano casi specialissimi di quello projettivo.

Egual sorte toccò al metodo della projezione centrale, che, suggerito incidentalmente dal Cousinery (*Géometrie perspective*, Paris, 1828), fu svolto magistralmente dal Fielder, il quale ne

---

(1) Cfr. Study, *Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen* (Leipziger Abh., 20, 1893).

(2) V. il *Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science* a cui serve d'introduzione l'*Aperçu historique*.

(3) *Ueber die projectivischen Coordinaten* (Wolf Zeitschr., 15, 1870), oppure l'opera *Die darstellende Geometrie*.

fece la base di tutta la geometria descrittiva, e dimostrò essere desso il germe di pressochè tutti gli altri noti sistemi di rappresentazione.

Nè trattai del metodo della notazione simbolica, vuoi perchè esso è piuttosto un ausiliare pel geometra, che un oggetto delle sue indagini, vuoi perchè la storia di tale metodo è compresa in quella della teoria delle forme, che con mano maestra venne recentemente narrata (1).

Passai sotto silenzio la dottrina degli invarianti differenziali, così profondamente studiata dall'Halphen (2), dal Lie (3) e dal Sylvester (4), quantunque essa si presti a molteplici applicazioni geometriche, perchè essa oscilla fra la geometria e la teoria delle equazioni differenziali, ma inclinando verso quest'ultima.

Invano chiesero un posto nella mia rivista le interessanti ricerche di " geometria cinematica " (5) con cui il Mannheim si sforza di tener desto nella patria di Chasles lo spirito di ricerca geometrica pura; ma qui voglio segnalare una nuova volta la recente opera riassuntiva intitolata *Principes et développements de géométrie cinématique* (Paris, 1894), dalla quale si apprende quanto contribuì il citato geometra francese allo sviluppo di una interessantissima diramazione della geometria, che fu studiata da Roberval, da Huygens e de la Hire, ed ebbe, in tempi più recenti a cultori, oltre Chasles (6), l'Aronhold (7), lo Schö-

---

(1) Franz Meyer, *Bericht über den gegenwärtigen Stand der projectiven Invariantentheorie* (Deutsch. Math.-Ver., 1, 1890-91).

(2) *Sur les invariants différentiels* (Thèse, Paris, 1878); *Sur les invariants différentiels des courbes gauches* (Journ. Éc. pol., 47ᵉ cah., 1880); *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre* (Acta, 3, 1883) ecc.

(3) *Ueber Differentialinvarianten* (Math. Ann., 24, 1884).

(4) *Lectures on the Theory of Reciprocants* (Am. Journ., 8, 1886).

(5) È questo il nome proposto nel 1859 dal Terquem e poi generalmente adottato.

(6) *Note sur les propriétés générales de deux corps semblables, placés d'une manière quelconque dans l'espace, et sur le déplacement fini ou infiniment petit d'un corps solide libre* (Bull. de Férussac, 14, 1830, e Corr. math., 7, 1832); *Construction graphique des tangentes et des rayons de courbure des courbes géométriques* (Bull. de Férussac, 13, 1830); *Propriétés géométriques du mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace* (C. R., 16, 1843); *Propriétés relatives au déplacement fini dans l'espace d'une figure de forme invariable* (Id., 51 e 52, 1861). Cfr. i già citati *Mélanges de géométrie pure* del de Jonquières.

(7) *Kinematische Mittheilungen. Grundzüge der kinematischen Geometrie* (Verh. des Vereins zur Beförd. des Gewerb. in Preussen, Berlin, 1872).

nemann (1), ed A. Schoenfliess (2). — Come questi furono considerati di pertinenza della meccanica, epperò ci sfuggirono fino ad ora, gli studî del Reye sui momenti d'inerzia (*Trägheits- und höhere Momente eines Massensystems in Bezug auf Ebenen*, Journ. f. Math., 72, 1870), benchè essi pure siano stati fecondi di notevoli verità geometriche (v. pagg. 100 e 105).

Fra le applicazioni della geometria inclino ad ascrivere eziandio le ricerche intorno alle probabilità geometriche, non molto guari compendiate dallo Czuber nell'opuscolo intitolato appunto *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte* (Leipzig, 1884), quantunque bene spesso esse abbiano servito di pretesto allo svolgimento di calcoli eleganti: ed in ciò, secondo il parere di molti, ha sede la loro indiscutibile importanza, chè quanto al valore delle conclusioni a cui esse condussero, parecchi lo negano od almeno ritengono deva essere meglio assodato.

Altrettanto non può ripetersi delle memorabili indagini del Lindemann (*Ueber die Zahl* π, Math. Ann., 20, 1882) (3), le quali condussero a concludere che il rapporto della circonferenza al diametro non può essere radice di alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali, epperò menarono a spiegare il famoso enigma che presentava la quadratura del circolo, a sciogliere il quale centinaia di generazioni di geometri avevano sciupato tempo e fatica (4); risultato questo che c'induce a ri-

---

(1) *Ueber die Construction von Normalen und Normalebenen gewisser krummer Flächen und Linien* (Journ. f. Math., 90, 1880); cfr. Geiser, *Ueber einen fundamental Satz aus der kinematischen Geometrie des Raumes* (Ivi).

(2) *Zur Theorie der Bewegung starrer Systeme* (Journ. f. Math., 98, 1885); *Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung* (Leipzig, 1886).

Nè si può dimenticare che l'utilità di considerazioni cinematiche in ricerche geometriche emerge anche dall'*Exposé géométrique du calcul différentiel et intégral* (Paris, 1861-63) del Lamarle, dalla grande opera del Darboux sulla geometria differenziale (cfr. anche la Diss. di X. Antomari, *Application de la méthode cinématique à l'étude des surfaces réglées; mouvement d'un corps solide assujetti à cinq conditions*, Paris, 1894), nonchè dall'importante opera del Peano sopra le *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Torino, 1887).

(3) Delle semplificazioni che ricevettero le argomentazioni del Lindemann da parte di altri illustri geometri non è qui il caso di fare una completa enumerazione, tanto più che esse sono riassunte nelle bellissime *Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare* tenute a Gottinga da F. Klein e di recente tradotte in italiano da F. Giudice (Torino, 1896).

(4) Già nel secolo scorso Lambert (Mémoires de l'Acad. de Berlin, 1761) aveva dimostrata l'irrazionalità di π e Legendre chiuse la dimostrazione di

cordare la costruibilità con riga e compasso, dimostrata da Gauss, di tutti i poligoni regolari il cui numero di lati è primo e della forma $2^n + 1$ (1).

Non abbiamo parlato della geometria del triangolo e delle teorie derivate perchè quella e queste appartengono ad un gruppo d'indagini che occupano un posto più umile di quelli in cui si trovano i rami discorsi (2); in essa, d'altronde, ci sono piuttosto nuovi risultati speciali che nuovi metodi e nuove idee. Se lo stesso facemmo per la logica matematica — cioè per quella disciplina intravveduta da Leibniz, coltivata con tanto successo dal Boole, e che trovò in Italia un apostolo fervente nel Peano — gli è che le applicazioni di essa alla geometria non sono ancora molto numerose.

Altrettanto certamente non può ripetersi per il " metodo delle equipollenze „ di Bellavitis (3) e per il " metodo dei quaternioni „ di Hamilton (4); però, malgrado gli sviluppi che ricevettero (5), non si può ancora asserire che tali metodi

---

quella di π^2 con queste fatidiche parole: " Il est probable que le nombre π n'est pas même compris dans les irrationnelles algébriques, c'est-à-dire, qu'il ne peut pas être la racine d'une équation algébrique d'un nombre fini de termes dont les coëfficients sont rationnels; mais il paraît très difficile de démontrer rigoureusement cette proposition; nous pouvons seulement faire voir que le carré de π est encore un nombre irrationnel „ (*Élém. de Géom.*, nota IV).

(1) *Disquisitiones arithmeticae* (Leipzig, 1801). Cfr. Richelot, *De resolutione algebraica aequationis* $X^{257} = 1$, *sive de divisione circuli per bisectionem anguli septies repetitam in partes 257 inter se aequales commentatio coronata* (Journ. f. Math., 9, 1832); Staudt, *Construction des regulären Siebenzehnecks* (Id., 24, 1842); Schröter, *Zur v. Staudt'schen Construction des regulären Siebzehnecks* (Id., 75, 1873); Affolter, *Zur Staudt- Schröter'schen Construction des regulären Vielecks* (Math. Ann., 6, 1873); Hermes, *Ueber die Theilung des Kreises in* 65537 *gleiche Theile* (Götting. Nachr., 1894).

(2) Il lettore desideroso di ragguagli sull'argomento ricorra all'*Esquisse historique sur la marche du développement de la géométrie du triangle* (Ass. fr., 1889) del Vigarié.

(3) V. la *Sposizione del metodo delle equipollenze* fatta dal Bellavitis stesso in Mem. Soc. XL, 25, II parte, 1854; cfr. anche la nota dello stesso *Sulle origini del metodo delle equipollenze* inserita in Mem. Ist. Ven., 19, 1876; inoltre Laisant, *Théorie et applications des équipollences* (Paris, 1887).

(4) Di questo esistono due esposizioni da parte dell'inventore — *Lectures on Quaternions* (Dublin, 1853) e *Elements on Quaternions* (London, 1866) — e molte altre posteriori che non giova qui enumerare essendo in gran parte indicate nella Nota bibliografica che precede l'*Introduction à la méthode des quaternions* (Paris, 1881) del Laisant.

(5) V., oltre a due memorie citate a pag. 217, gli articoli seguenti: Chace, *On a certain Class of Cubic Surfaces treated by Quarternions* (Am. Journ., 2,

abbiano palesata così grande fecondità da meritare un posto nell'arsenale degli strumenti necessarî al geometra (1). Fermiamoci un momento ancora sui quaternioni, non tanto per segnalare l'estensione che essi ottennero dal Sylvester (2), giacchè essa sembra di pretta pertinenza dell'analisi, quanto per citare le trasformazioni che essi subirono per opera di A. Macfarlane (3), le quali, benchè abbiano trovato in Inghilterra una gagliarda opposizione (4), pure sembrano meritevoli della considerazione dei geometri.

Il metodo di Hamilton ha punti di contatto molteplici e intimi con quelli di Grassmann, benchè questi possiedano una vastità ed una profondità maggiori, epperò siano stati maggiormente svolti e più spesso usati.

E qui cade in acconcio di osservare come nella breve storia che abbiamo tessuto delle battaglie che i geometri in questi ultimi tempi combatterono e vinsero, raramente incontrammo

---

1879); Story, *Note on the proceding Paper* (Ivi); Stringham, *The Quaternion Formulae for Quantifications of Curves, Surfaces and Solids, and for Barycentres* (Ivi); Chapman, *Application of Quaternions to Projective Geometry* (Id., 14, 1891); P. Molenbroek, *Over de toepassing der Quaternionen op de mechanica en de natuurkunde* (Amsterdam Versl., 1893); R. Beez, *Zur Theorie der Vectoren und Quarternionen* (Zeitschr. f. Math., 41, 1896). Si consultino anche le due opere recenti: Molenbroek, *Anwendung der Quaternionen auf die Geometrie* (Leiden, 1893), e A. Mc. Aulay, *Utility of Quaternions in Physic* (London, 1894).

(1) Per maggiori particolari storici rimandiamo il lettore al V Abschnitt del vol. 2° della *Synopsis der höheren Mathematik* (Berlin, 1894) dell'Hagen. Soltanto osserviamo che, non soltanto Bellavitis e Hamilton, ma anche Gauss ed Argand, nel proporre la ben nota rappresentazione geometrica dei numeri complessi, ebbero un precursore in C. Wessel. matematico danese il cui notevole scritto venne di recente analizzato da C. Juel nell'articolo *Redgjörelse for en Afhandling af Landmaaler Caspar Wessel fra 1799* (Nyt Tydsskrift for Math., 6, 1895).

(2) Cfr. ad es. *Lectures on the Principles of Universal Algebra* (Am. Journ., 6, 1884).

(3) V. gli scritti: *Principles of the Algebra of Physics* (Proc. American Ass. for Advancement of Science, 11, 1891): *The Imaginary of Algebra* (Ib., 12, 1892); *The Fundamental Theorems of Analysis Generalized for Space, On the Definitions of the Trigonometric Functions*, e *The Principles of Elliptic and Hyperbolic Analysis* (Math. Congress at Chicago, 1893).

(4) Cfr. i vol. 47-49 dell'eccellente periodico inglese *Nature*; inoltre: Hyde, *Macfarlane Algebra of Physics* (Annals of Mathematics, 7, 1892-93); Knott, *Recents Innovations in Vector Theory* (Proc. of the R. Society of Edinburgh, 19), e *The Quaternions and his Depreciators* (Proc. of the Edinburg math. Society, 11, 1892).

il nome di Grassmann (1), e sempre ne parlammo di sfuggita; gli è che la forma pienamente generale ed assai astratta in cui egli per due volte espose i proprî concetti (2) rendendoli ai più inaccessibili, li privò di esercitare la benefica influenza di cui erano capaci. Grassmann fu un solitario nella matematica e fu mestieri che Cremona (3) e Clebsch (nella precitata necrologia di Plücker) ne additassero il valore perchè i geometri si decidessero a meditarne le opere. Alla diffusione delle proprie idee contribuì in parte il Grassmann medesimo mettendo in luce le coincidenze fra i suoi scritti ed altre produzioni moderne (4), in parte lo Schlegel coll'opera *System der Raumlehre. Nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre und als Einleitung in derselben dargestellet* (Leipzig, 1872 e 1875), ma più ancora coloro che dei metodi di Grassmann fecero delle nuove esposizioni o delle ulteriori applicazioni; quali siano le più cospicue si apprende dal seguente elenco di scritti: Schlegel, *Ueber neuere geometrische Methoden und ihre Verwandtschaft mit der Grassmann'schen Ausdehnungslehre* (Zeitschr. f. Math., 24, 1879) e *Introduction aux méthodes géométriques de H. Grassmann* (Progreso, 2, 1892); Mehmke, *Anwendung der Grassmann'schen Ausdehnungslehre auf die Geometrie der Kreise in der Ebene* (Diss. Tübingen, 1880), *Ueber die Bestimmung von Trägheitsmomenten mit Hülfe Grassmann'scher Methode* (Math. Ann., 23, 1884), *Ueber eine allgemeine Construction der Krümmungsmittelpunkte ebener Curven und eine neue Begründung der Fundamentalsätze der Flächentheorie* (Riv. di Mat., 2, 1892), *Ueber*

---

(1) V. Schlegel, *Hermann Grassmann. Sein Leben und seine Werke* (Leipzig, 1878; Hermann Grassmann, *Sein Leben und seine mathematisch-physikalische Arbeiten* (Math. Ann., 14, 1879); e A. Favaro, *Della vita e degli scritti fisico-matematici di Ermanno Grassmann* (Bull. Bonc. 11, 1878).

(2) *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre. Erster Theil, die lineale Ausdehnungslehre enthaltend* (Leipzig, 1844; II Aufl., Ivi, 1878). *Die Ausdehnungslehre* (Berlin, 1862).

(3) *Solution des Question 494 et 499, méthode de Grassmann et propriétés de la cubique gauche* (Nouv. Ann., 19, 1860).

(4) V. oltre a memorie già menzionate: *Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibnitz erfundene Charakteristik* (Leipzig, 1847), *Die neuere Algebra und die Ausdehnungslehre* (Math. Ann., 7, 1874), *Die Mechanik und die Principien der Ausdehnungslehre* (Id., 12, 1877); *Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre* (Ivi), *Verwendung der Ausdehnungslehre für die Polarentheorie und den Zusammenhang algebraischer Gebilde* (Journ. f. Math., 84, 1878).

die Aenderung der Hauptkrümmungen einer Fläche bei einer beliebigen Raumtransformation (Ivi), *Kleine Beiträge zu den Anwendungen der Methode von Grassmann* (Zeitschr. f. Math., 37, 1892); Grassmann (Hermann jr.), *Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumcurven und krummen Flächen* (Halle u. S., 1886, 1888, 1893), e *Punktrechnung und projettive Geometrie* (Ivi, 1894); Caspary, *Ueber die Erzeugung algebraischer Raumcurven durch veränderlichen Figuren* (Journ. f. Math., 100, 1887) e *Sur les courbes gauches* (Bull. Sc. math., II, 9, 1887, cfr. Carvallo, *Exposition d'une méthode deM. Caspary pour l'étude des courbes gauches,* Bull. S. M. F., 15, 1887); Peano, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann* (Torino, 1888), e *Gli elementi di calcolo geometrico* (Torino, 1891); E. W. Hyde, *The Directional Theory of Screws* (Annals de Matematics, 4, 1888), e *The Directional Calculus, based upon the Methods of Hermann Grassmann* (Boston, 1890); R. Müller, *Die Liniengeometrie nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre* (Monatshefte, 2, 1891), *Die Kugelgeometrie nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre* (Id., 3, 1892, e 4, 1893), e *Anwerdung der Grassmann'schen Methoden auf die Theorie der Curven und Flächen zweiten Grades* (Journ. f. Math., 115, 1895); Carvallo, *La méthode de Grassmann* (Nouv. Ann., III, 11, 1892; Gentry, *Discussion par la géométrie vectorielle d'une quadrique circonscrite à un elipsoïde donné* (Nouv. Ann., III, 13, 1894) (1). Come prova che finalmente il Grassmann conquistò nella falange dei geometri il posto di cui ha diritto, citeremo la pubblicazione, intrapresa sotto gli auspici dell'Accademia sassone, delle opere complete di questo grande geometra, fisico e filologo.

Malgrado le innumerevoli imperfezioni esistenti nella pittura che tentai dello stato odierno della geometria, se il lettore la esamina nel suo complesso, sarà indubbiamente compreso da profonda meraviglia constatando, non soltanto lo sviluppo enorme che tale scienza subì in questi ultimi cinquant'anni (dire che

(1) Maggiori particolari si troveranno nell' interessante articolo dello Schlegel sopra *Die Grassmann'sche Ausdehnungslehre* (Zeitschr. f. Mat., 41, 1896), e nell'*Elenco bibliografico sull' " Ausdehnungslehre " di H. Grassmann*, in Riv. di Mat., 5, 1895.

in tale periodo il patrimonio geometrico si è raddoppiato, non è esagerazione), non soltanto il rigore a cui si è aspirato e si è in gran parte raggiunto nelle investigazioni di geometria, ma eziandio per l'aspetto nuovo, più vago e snello, più seducente ed espressivo che esse vennero man mano assumendo.

Le figure geometriche, che un tempo apparivano rigide ed immobili, direi quasi prive di anima, ottennero dalla teoria delle trasformazioni una vitalità insperata, grazie alla quale esse si mutano l'una nell'altra, svelando così delle parentele dianzi sconosciute e stabilendo delle relazioni che non si erano nemmeno sospettate.

Inoltre, mentre un tempo si credeva che noi, esseri a tre dimensioni e viventi in uno spazio in cui non riusciamo a percepire che tre dimensioni (1), fossimo condannati a studiare eternamente soltanto le varietà ad un numero di dimensioni non maggiore di tre, ora ci è lecito, fors'anco doveroso, di liberarci da tale idea come da un pericoloso pregiudizio (2); e la folla di lavori geniali che ci pullulano dinnanzi agli occhi e ad ogni istante si moltiplicano, fanno accorto chiunque non torca volontariamente l'occhio dal nuovo sole dell' importanza di questo progresso.

Infine l'aspra guerra, impegnatasi sullo scorcio del secolo passato e continuata nella prima parte di questo, fra la geometria e l'analisi si può considerare come per sempre finita; nè l'una nè l'altra delle discipline belligeranti riportò una decisiva e completa vittoria, ma ognuna ha dimostrato la capacità di agire in modo completamente autonomo ed indipendente ed ha costretto, perfino i più recalcitranti, ad ammettere che essa è in grado di sostenere da sola vittoriosamente qualunque lotta per la conquista di nuovi veri. Agli innumerevoli scritti in cui dei matematici troppo esclusivi dichiararono, più o meno esplicitamente, soltanto l'analisi esser degna di fede incondizionata, assoluta, completa, può contrapporsi la confessione del Sylvester, che ogniqual-

---

(1) Si vegga a questo proposito l'interessante discussione che si trova in principio della I Giornata dei *Dialoghi sui sistemi del mondo* del Galilei.

(2) Cfr. la limpida esposizione degli studî sopra tale argomento fatta da A. Nagy nell'articolo *Sulla recente questione intorno alle dimensioni dello spazio* (Rivista Italiana di Filosofia. Anno V, 1, 1890).

volta egli arrivò al fondo di qualche questione matematica, sentì di avere toccata una base geometrica (1). Alla *Mécanique analitique* ove Lagrange constatava con gioia mal repressa di essere riuscito ad evitare qualunque figura (2), fa splendido riscontro un eccellente trattato di meccanica portante il motto " geometrica geometrice " (3). Ai secolari servigi che l'Algebra prestò alla Geometria si possono contrapporre i vantaggi senza numero e senza pari che quella ritrasse da questa (4). E di questo periodo di pace, che G.° Cramer augurò un secolo e mezzo fa, nel quale la scienza del numero e quella dell'estensione sono animate da un alto spirito di nobilissima emulazione, tutti devono felicitarsi, perchè così ogni progresso dell'una trae seco od induce un progresso dell'altra; esso corrisponde allo stato odierno della scienza tutta (anzi forse lo rispecchia), giacchè ora, come notò lo Spencer, le varie discipline funzionano come arti ausiliarie le une rispetto alle altre.

Però, tale condizione della matematica moderna, a chiunque aspiri di coltivarla con buoni risultati, impone l'obbligo di non trascurare alcuna delle discipline che la compongono, in particolare di famigliarizzarsi col maneggio del calcolo su grandezze senza dimenticare la dottrina dell'estensione figurata. Ad affrontare serenamente e fiduciosi queste aumentate fatiche, non dimentichiamo che l' " analisi e le sintesi sono in fondo quasi sempre associate nelle opere nostre e costituiscono lo strumento più completo che possieda lo spirito umano. Perocchè lo spirito nostro non progredisce gran fatto senza il sussidio di segni e di immagini, e quando cerca di penetrare per la prima volta in questioni difficili, non ha di soverchio di questi due mezzi e di quella forza che spessissimo esso trae soltanto dal loro con-

---

(1) Questa dichiarazione, assieme ad altre asserzioni congeneri, si legge nel discorso pronunciato nel 1869 dinnanzi all'Associazione britannica per l'Avanzamento della scienza.

(2) " On ne trouvera point de figures dans cet ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques assujetties à une démarche régulière et uniforme ". Op. cit., Préface.

(3) Si allude qui all'opera dello Schell; con criterî analoghi è scritta quella del Somoff.

(4) V. fra l'altro: Minkowski, *Geometrie der Zahlen* (Leipzig, 1894).

corso „ (1); d'altronde è stato osservato con piena ragione che " quando si medita sulla storia delle matematiche applicate, si è realmente condotti ad attribuire le loro scoperte più cospicue, i loro più decisivi progressi, all'alleanza dell'analisi e della geometria. Ed i lavori, dovuti all'uso esclusivo di uno di questi strumenti, appaiono allora come preparazioni, perfezionamenti, in attesa dell'epoca che sarà fecondata dalla loro riunione „ (2).

Consci adunque della limitatezza delle nostre forze, adattiamoci pure a scegliere un campo ristretto in cui esercitare le nostre attività, ma non dimentichiamo che, se vogliamo trarne tutti i frutti che esso è capace di somministrare, abbiamo il diritto e forse il dovere di mettere alla prova tutti gli strumenti che l'intelligenza umana ha accumulati in non meno di venti secoli di incessante lavoro e che si trovano a disposizione di chiunque abbia l'accortezza di domandarli e l'abilità di servirsene.

---

(1) Poinsot, C. R., 6, 1838, p. 807.

(2) Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes* (Paris, 1859), p. XIII-XIV.

ELENCO DEI NOMI CITATI

Avvertenza. *La lettera* n *rinvia ad una nota a piè di pagina. I numeri in* grassetto *corrispondono a' luoghi ove si trovano i dati biografici.*

CORREZIONI ED AGGIUNTE

pag. 15; *linea* 10, *dal basso: invece di* J. Tannery *si legga* P. Tannery.
„ 18; „ 12, *dall'alto in principio: si tolga* (1637-1768)
„ 18; „ 13, „ *dopo* Simson *si legga* (1687-1768)
„ 42; „ 6, *dal basso: invece di* 1964, *si legga* 1864.
„ 47; „ 3, „ „ Hermathen, *si legga* Hermathena.
„ 48; „ 2, „ „ 1874, *si legga* 1894.
„ 53; „ 15, *dall'alto: invece di* Math. „ Mat.
„ 59; „ 15, „ „ stupire „ stupirsi.
„ 79; „ 10, „ „ Robek „ Bobek.
„ 79; „ 17, *dal basso:* „ Brux. Mém. *si legga* Bélgique Mem.
„ 89; „ 16, *dall'alto: si cancelli il* ?
„ 89; „ 15, *dal basso: dopo* R. del Grosso *aggiungere* (1813-1876)
„ 93; „ 4, „ „ Journ. de Math. *aggiungere* 4.
„ 95; „ 2, *dall'alto:* „ Joachimsthal *aggiungere* (1818-1861)
„ 107; „ 16, *dal basso:* „ da lui *aggiungere* ottenuti
„ 134; „ 14, „ *invece di* Ed. *si legga* Em.
„ 142; „ 14, „ „ Körndörfer *si legga* Korndörfer.
„ 146; „ 6, „ „ Stande *leggasi* Staude.
„ 159; „ 9, „ „ inserite „ inserito.
„ 196; „ 18, „ *in principio: si aggiunga* 5.
„ 200; „ 20, „ *dopo* e *si aggiunga* poi
„ 227; „ 5, „ *invece di* Wolff *leggasi* Wolf
„ 232; „ 8, „ „ 1887 „ 1877
„ 245; „ 8, *dall'alto: dopo* stereografica *si aggiunga in nota:* Questo nome si incontra per la prima volta nell'opera di F. Aguillon (1566-1617) intitolata *Opticorum Libr. VI* (Antwerp., 1613).
„ 277; „ 6, *dal basso: togliere* quàdriche
„ 279; „ 7, *dall'alto: invece di* essa *si legga* esso
„ 289; „ 17, *dal basso: dopo* Hoüel *si aggiunga* (1823-1886)
„ 293; „ 9 e 10 *dall'alto: il richiamo della nota* (1) *va posto dopo la parola* contemporanee
„ 295; „ 18, *dall'alto: il richiamo della nota* (5) *va posto dopo la parola* ricerche
„ 299; „ 2, *dal basso: dopo* Lejeune Dirichlet *si aggiunga* (1805-1859)
„ 306; „ 12, *dall'alto: prima di* Brill *si legga* Ricci, *Principî di una teoria delle forme differenziali quadratiche* (Ann. di Mat., II, 12, 1884).
„ 319; „ 13, *dal basso: dopo*) *si aggiunga:* e *Sugli spazi lineari delle quadriche a numero pari di dimensioni* (Torino Atti, 30, 1895).